Soluzioni
16/5/2003

Esercizio 1. La funzione di densità congiunta è data da:

$$f(x_1, x_2; \theta) = \theta^2 x_1^{\theta-1} x_2^{\theta-1} I_{(0,1)}(x_1) I_{(0,1)}(x_2),$$

da cui segue che la funzione di potenza è:

$$\pi(\theta) = Prob((x_1, x_2) \in C_\alpha)|\theta = \int_{C_\alpha} f(x_1, x_2; \theta) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} \left[\int_{3/4}^1 \theta x_2^{\theta-1} dx_2 \right] dx_1 = \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} [x_2^\theta]_{3/4}^1 dx_1 =$$

$$= \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} \left[1 - \left(\frac{3}{4} x_1 \right)^\theta \right] dx_1 = \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} - \left(\frac{3}{4} x_1 \right)^\theta \int_0^1 \theta x_1^{2\theta-1} dx_1 =$$

$$= [x_1^\theta]_0^1 - \left(\frac{3}{4} \right)^\theta \frac{\theta}{2\theta} [x_1^{2\theta}]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^\theta.$$

L'ampiezza α di un test è

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \pi(\theta).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\alpha = \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^\theta \right\},$$

poichè la funzione di potenza è una funzione monotona non decrescente di θ, l'estremo superiore viene raggiunto per $\theta = 1$, quindi l'ampiezza è data da $\alpha = \frac{5}{8}$.

Esercizio 2. (a) La funzione di potenza è data da:

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= Prob(x \in C_\alpha|\theta) = \int_{C_\alpha} f(x; \theta) dx = \\ &= \int_{1/2}^1 \theta x^{\theta-1} dx = [x^\theta]_{1/2}^1 = 1 - \frac{1}{2^\theta}. \end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\alpha = \sup_{\Theta_0} \pi(\theta) = \sup_{0\leq\theta\leq 1} \left\{ 1 - \frac{1}{2^\theta} \right\} = \frac{1}{2}.$$

(b) Poiché le ipotesi a confronto sono entrambi semplici utilizziamo il lemma di Neyman-Pearson per costruire un test UMP. La regione critica è definita dai valori di x tali che:

$$\frac{L(\theta_0; x)}{L(\theta_1; x)} \leq k_\alpha.$$

Ovvero:

$$\frac{L(\theta = 2; x)}{L(\theta = 1; x)} = 2x \Rightarrow 2x \leq k_\alpha \Leftrightarrow x \leq k'_\alpha,$$

e quindi si ha che:

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : x \leq k'_\alpha\}.$$

Inoltre dalla condizione:

$$\alpha = Prob(x \in C_\alpha | \theta_0) =$$

$$= \int_0^{k'_\alpha} 2x dx = [x^2]_0^{k'_\alpha} = k'^2_\alpha$$

segue che:

$$k'_\alpha = \sqrt{\alpha}.$$

(c) Dal punto (b) sappiamo che $\alpha = k'^2_\alpha$, inoltre

$$\beta = Prob(x \notin C_\alpha | \theta_1) =$$

$$= \int_{k'_\alpha}^1 dx = [x]_{k'_\alpha}^1 = 1 - k'_\alpha.$$

Quindi:

$$\alpha + \beta = k'^2_\alpha + 1 - k'_\alpha.$$

Tale quantità è minimizzata per $k'_\alpha = \frac{1}{2}$. Il test richiesto è quindi definito dalla regione critica:

$$C = \{x \in (0,1) : x \leq 1/2\}.$$

(d) Osserviamo che la funzione di densità è di tipo esponenziale per cui possiamo utilizzare il Rapporto Monotono di Verosimiglianza (MLR) per costruire il test richiesto. Sia $\theta_1 > \theta_2$, allora:

$$MLR = \frac{\theta_1 x^{\theta_1 - 1}}{\theta_2 x^{\theta_2 - 1}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} x^{\theta_1 - \theta_2} =$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2}\exp\{(\theta_1-\theta_2)\log x\},$$

che è una funzione monotona non decrescente per la statistica $t(x) = \log x$, quindi un test UMP è definito dalla regione critica:

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : \log x \geq k_\alpha\},$$

ovvero:

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : x \geq k_\alpha\}.$$

Inoltre:

$$\alpha = Prob(x \in C_\alpha | \theta = 2) =$$

$$\int_{k_\alpha}^{1} 2x dx = 1 - k_\alpha^2 \Rightarrow k_\alpha = \sqrt{1-\alpha}$$

(e) Il LRT è determinato dalla relazione:

$$\lambda(x) = \frac{\max_{\Theta_0} L(\theta;x)}{\max_{\Theta} L(\theta;x)} \leq k_\alpha.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\max_{\Theta_0} L(\theta;x) = L(1;x) = 1,$$

mentre $L(\theta;x)$ assume massimo per $\theta = -\frac{1}{\log x}$ quindi

$$\max_{\Theta} L(\theta;x) = -\frac{1}{\log x} e^{(-\frac{1}{\log x}-1)\log x} = \frac{-1}{ex\log x}.$$

Dunque:

$$\lambda(x) = -ex\log x \leq k_\alpha \Leftrightarrow x\log x \geq k_\alpha.$$

Allora abbiamo costruito la zona di rifiuto

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : x\log x \geq k_\alpha\}.$$

Esercizio 3. (a) Per determinare il test richiesto utilizziamo i Lemma di Neyman-Pearson:

$$\frac{L(\theta_0;x)}{L(\theta_1;x)} \leq k_\alpha \Rightarrow \frac{L(\theta=0;x)}{L(\theta=1;x)} = \frac{1}{2x} \leq k_\alpha$$

$$\Rightarrow x \geq k_\alpha.$$

Quindi la regione critica è determinata da:

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : x \geq k_\alpha\}.$$

Inoltre:

$$\alpha = Prob(x \in C_\alpha | \theta = 0) =$$
$$\int_{k_\alpha}^{1} dx = 1 - k_\alpha$$
$$k_\alpha = 1 - \alpha.$$

(b) La funzione potenza è data da:

$$\pi(\theta) = Prob(x \in C\alpha | \theta) =$$

$$= \int_{1/2}^{1} (2\theta x + 1 - \theta) dx = 1 - \int_{0}^{1/2} (2\theta x + 1 - \theta) dx =$$

$$= 1 - \frac{\theta}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} = \frac{2+\theta}{4}.$$

Inoltre:

$$\alpha = \sup_{\Theta_0} \pi(\theta) = \sup_{-1 \leq \theta \leq 0} \frac{2+\theta}{4} = \frac{1}{2}.$$

(c) Il LRT è determinato dalla relazione:

$$\lambda(x) = \frac{\max_{\Theta_0} L(\theta; x)}{\max_{\Theta} L(\theta; x)} \leq k_\alpha.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\max_{\Theta_0} L(\theta; x) = \max_{\theta=0} L(\theta; x) = I_{[0,1]}(x)$$

mentre:

$$\max_{\Theta} L(\theta; x) = \max_{-1 \leq \theta \leq 1} L(\theta; x) = \max_{-1 \leq \theta \leq 1} (2\theta x + 1 - \theta) I_{[0,1]}(x) =$$

$$\max_{-1 \leq \theta \leq 1} [\theta(2x - 1) + 1] I_{[0,1]}(x).$$

Ora la funzione $\theta(2x-1)+1$ è monotona decrescente per $x \leq 1/2$ e monotona crescente per $x > 1/2$ quindi si avrà

$$\max_{-1 \leq \theta \leq 1} L(\theta; x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$$

Quindi se

$$\lambda(x) \leq k_\alpha \Rightarrow \frac{1}{\lambda(x)} \geq \frac{1}{k_\alpha}.$$

Dallo studio della funzione $\lambda(x)$ si deduce che ponendo $x_1 = 1 - k_\alpha/2$ e $x_2 = k_\alpha/2$ si ha che

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : x \leq x_1, x \geq x_2\} = \{x \in (0,1) : |x - \frac{x_1 + x_2}{2}| \geq \frac{x_2 - x_1}{2}\},$$

da cui

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : |x - \frac{1}{2}| \geq h_\alpha\},$$

Possiamo quindi cercare il valore di h_α in base alla condizione

$$\alpha = Prob(|x - \frac{1}{2}| \geq h_\alpha | \theta = 0) =$$

$$2\int_{1/2}^{1/2+h_\alpha} dx = 2\int_0^{h_\alpha} = 2h_\alpha$$

$$h_\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

Esercizio 4. Vedere Mood Graybill Boes, 9.4.3 "Uguaglianza di due medie"

Esercizio 5. Vedere Mood Graybill Boes, 9.4.4 "Due Varianze"