Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
TN01 - Tutorato - Andrea Cova
Mercoledì 9 aprile 2003

1. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni (mod 42) della congruenza:

$$5^X \equiv 4X^4 \pmod 7.$$

2. Sia p un primo della forma $8t+3$, con $t > 0$, e si supponga che $q := \frac{p-1}{2}$ sia anch'esso un primo.

(1) Dimostrare che se a è relativamente primo con p, allora $\mathrm{ord}_p(a) = 2, q, 2q$.
(2) Dimostrare che $2q \equiv 1 \pmod p$ se e soltanto se $(\frac{2}{p}) = 1$.
(3) Mostrare che 2 è una radice primitiva di p.
(4) Determinare almeno due radici primitive distinte di 27.

3. Trovare tutte le (eventuali) soluzioni (modulo 17×16) della congruenza:

$$7X \equiv X^4 \pmod{17}.$$

4. Dimostrare che esistono infiniti numeri primi del tipo $6k+1$.

5. Dimostrare che $2k$ non possiede radici primitive per ogni $k \geq 3$.

6. Trovare le (eventuali) soluzioni x, con $0 \leq x \leq 59$, della congruenza:

$$8X \equiv X^2 \pmod{15}.$$

7. Sia r una radice primitiva di p, con p primo dispari. Dimostrare che:

(1) se r non è radice primitiva $\pmod{p^2}$, allora $r+p$ è una radice primitiva $\pmod{p^2}$.
(2) $r+p$ o/e $r-p$ è una radice primitiva $\pmod{p^2}$.

8. Sia p un primo dispari e sia r una radice primitiva di p. Sia a un intero tale che $\mathrm{MCD}(a,p) = 1$. Dimostrare che $\sum_{a=1,\cdots,p-1} (\frac{a}{p}) = 0$.