**TN01 - Introduzione alla teoria dei numeri - A.A. 2002/2003**

**Valutazione "in itinere" - I Prova**

**MATRICOLA:** ...............

**COGNOME:** .......................... **NOME:** .....................

| esercizio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5.1 | 5.2 | 5.3 | 5.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| punteggio max | - | - | - | - | - | - | - | - |
| punteggio assegnato | | | | | | | | |
| totale | | | | | | | | |

**ESERCIZIO 1.** Dato il sistema:

$$\begin{cases} 7\lambda X + 12Y \equiv 3\mu \pmod{17} \\ 14X - 2Y \equiv 9 \pmod{17}. \end{cases}$$

(1) Determinare i valori di $\lambda$ e $\mu$, $1 \leq \lambda, \mu \leq 16$ per i quali il sistema ammette unica soluzione.
(2) Al variare di $4 \leq \lambda \leq 6$ e $15 \leq \mu \leq 16$, trovare tutte le (eventuali) soluzioni del sistema.

**ESERCIZIO 2.** Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della congruenza polinomiale:

$$4X^3 + 7X^2 + 12X + 9 \equiv 0 \pmod{54}.$$

**ESERCIZIO 3.** Sia $p$ un primo dispari.

**(1)** Per ogni intero $h$, con $1 < h < p-1$, mostare che esiste un unico intero $k_h \neq h$, con $1 < k_h < p-1$, tale che $hk_h \equiv 1 \pmod{p}$.
**(2)** Per ogni intero $h$, con $1 < h < p-1$, mostrare che l'unico intero $k_h$ del punto precedente [cioè, $1 < k_h < p-1$, con $hk_h \equiv 1 \pmod{p}$] è tale che:

$$k_h \equiv \frac{-(p-1)!}{h} \pmod{p} \ \left(\text{ovvero,}\ p - k_h \equiv \frac{(p-1)!}{h} \pmod{p}\right).$$

**(3)** Mostrare che

$$\sum_{h=1}^{p-1} h = 1 + \sum_{h=2}^{p-2} k_h + (p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

**ESERCIZIO 4.** Data l'eqazione diofantea:

$$(3\lambda + 1)X + 5Y = 10,$$

(1) determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione è risolubile;
(2) per il minimo valore positivo di $\lambda$ per il quale l'equazione assegnata scrivere esplicitamente le soluzioni.