Esercizi AC1

Anna Scaramuzza

24/05/2004

Esercizio 1. Dimostrare che il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

converge.

Soluzione. Poniamo $a_k = -\frac{z^2}{k^2}$ e consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$$

Dimostriamo che tale serie converge. Poiché $|a_k| = \frac{|z^2|}{k^2}$ allora

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = |z^2|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

L'ultima serie è una serie convergente quindi per la Proposizione (2) il prodotto infinito è assolutamente convergente e di conseguenza anche convergente.

Esercizio 2. Dimostrare che

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Soluzione. Si dimostra facilmente che

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)\right) = \left(\coth t - \frac{1}{t}\right)$$

Sfruttiamo tale fatto considerando l'integrale

$$\begin{aligned}\int_0^z\left(\coth t-\frac{1}{t}\right)dt &= \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)\Big|_0^z\\ &= \ln\left(\frac{\sin z}{z}\right)\end{aligned}$$

Se sviluppiamo in serie di Laurent la funzione integranda abbiamo:

$$\int_0^z\left(\coth t-\frac{1}{t}\right)dt = \int_0^z\left(\frac{2t}{t^2-\pi^2}+\frac{2t}{t^2-4\pi^2}+\dots\right)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \\
&= \ln \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)
\end{aligned}
$$

Dall'ultima uguaglianza si ha

$$
\ln\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \ln \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)
$$

da cui segue la tesi.

Esercizio 3. Stabilire se i prodotti infiniti seguenti convergono oppure no:

1.
$$
\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \tag{1}
$$

2.
$$
\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \tag{2}
$$

3.
$$
\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\cos k\pi}{k^2+1}\right) \tag{3}
$$

4.
$$
\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \tag{4}
$$

5.
$$
\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right) \tag{5}
$$

Soluzione. 1. Per la proposizione (2) sappiamo che

$$
\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)
$$

converge se e solo se converge la serie $\sum_k |a_k|$ quindi consideriamo

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}
$$

Tale serie converge, per cui anche il prodotto converge.

2. Per la proposizione (2) consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| -\frac{1}{\sqrt{k+1}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Ma questa serie geometrica diverge quindi anche il prodotto infinito diverge.

3. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\cos k\pi}{k^2+1} \right| \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \tag{6}$$

Tale serie converge e quindi converge anche il prodotto infinito converge.

4. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{7}$$

che diverge quindi diverge anche il prodotto infinito associato.

5. Al prodotto infinito associamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} \tag{8}$$

il cui termine k-esimo tende a 1 per $k \to \infty$ e quindi la serie diverge. Ne segue che anche il prodotto infinito diverge.

Esercizio 4. Dimostrare che

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Soluzione. Per la teoria sui prodotti infiniti consideriamo la serie

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \big(\log(n^2-1) - \log n^2\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \big(\log(n+1) + \log(n-1) - 2\log n\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\big(\log(n+1) - \log n\big) + \big(\log(n-1) - \log n\big)\Big]
\end{aligned}$$

Di tale le serie consideriamo la serie troncata fino al termine N:

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^{N} \big(\log(n+1) - \log n\big) + \big(\log(n-1) - \log n\big) \\
&= (\log(N+1) - \log 2) + (\log(2-1) - \log N) \\
&= \log(N+1) - \log 2 - \log N
\end{aligned}$$

Se consideriamo il limite per $N \to \infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} S_N &= \lim_{N\to\infty} \log(N+1) - \log 2 - \log N \\ &= -\log 2\end{aligned}$$

e quindi

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = e^{\log\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

come si voleva.

Esercizio 5. Dimostrare che per un prodotto infinito convergente assolutamente il limite non cambia se si considera un riordinamento dei fattori.

Soluzione. Per definizione, un prodotto infinito converge assolutamente se e solo se la serie logaritmica associata converge assolutamente. Se la serie logaritmica converge assolutamente allora esiste il limite delle somme parziali $S_N = \sum_{k=1}^{N} \log(1+a_k)$ per $N \to \infty$ e possiamo suppore che sia pari a S.
Per definizione della serie logaritmica, il prodotto parziale P_N è pari a $P_N = e^{S_N}$ e quindi il limite per $N \to \infty$ è pari a e^S.
Ricordiamo anche che se una serie converge assolutamente un riordinamento degli addendi lascia invariato il limite della serie.
Fatte queste premesse, consideriamo un riordinamento dei fattori del prodotto infinito. Questo determina un riordinamento degli addendi nella serie logaritmica associata. Poiché la serie convere assolutamente allora il suo limite non dipende dal nuovo ordinamento degli addendi e quindi per come abbiamo definito il limite del prodotto infinito anch'esso non dipende dal riordinamento dei fattori.

Esercizio 6. Dimostrare che

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+z^{2^k}\right) = \frac{1}{1-z}$$

per $|z| < 1$.

Soluzione. Dimostriamo prima che

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+z^{2^k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j$$

Consideriamo i prodotti parziali dati da N fattori e verifichiamo che sussiste:

$$\prod_{k=0}^{N}\left(1+z^{2^k}\right) = \sum_{j=0}^{2^{N+1}-1} z^j$$

e poi passando al limite per $N \to \infty$ otteremo la tesi in quanto la serie al secondo verifica ciò che si vuole provare.
Procediamo per induzione sul numero dei fattori che determinano il prodotto parziale:

1. Per $N = 2$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{2}\left(1+z^{2^k}\right) &= (1+z)\left(1+z^2\right)\left(1+z^4\right) \\
&= \left(1+z+z^2+z^3\right)\left(1+z^4\right) \\
&= 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7 \\
&= \sum_{j=0}^{2^{N+1}-1} z^j
\end{aligned}$$

2. $N-1 \rightarrow N$. Cioè supponiamo che valga la seguente uguaglianza

$$\prod_{k=0}^{L}\left(1+z^{2^k}\right) = \sum_{j=0}^{2^{L+1}-1} z^j$$

per $L \leq N-1$ e dimostriamo che otteniamo la stessa uguaglianza per $L = N$.
Sia quindi:

$$\begin{aligned}
P_N &= \prod_{k=0}^{N}\left(1+z^{2^k}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{N-1}\left(1+z^{2^k}\right)\cdot\left(1+z^{2^N}\right) \\
&= \left(1+z+\ldots+z^{2^N-1}\right)\left(1+z^{2^N}\right) \quad \text{per induzione} \\
&= \sum_{j=0}^{2^N-1} z^j + z^{2^N}\cdot\sum_{k=0}^{2^N-1} z^k \\
&= \sum_{j=0}^{2^N-1} z^j + \sum_{k=0}^{2^N-1} z^{k+2^N}
\end{aligned}$$

Possiamo considerare il cambiamento di variabile $j = k+2^N$ nella seconda sommatoria che così diventa

$$\sum_{k=0}^{2^N-1} z^{k+2^N} = \sum_{j=2^N}^{2^{N+1}-1} z^j$$

e quindi

$$P_N = \sum_{j=0}^{2^{N+1}-1} z^j$$

A questo punto consideriamo il limite per $N \rightarrow \infty$:

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+z^{2^k}\right) = \lim_{N\rightarrow\infty}\prod_{k=0}^{N}\left(1+z^{2^k}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{2^{N+1}-1} z^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} z^j$$

Poiché la serie $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ converge per $|z| < 1$ al rapporto

$$\frac{1}{1-z}$$

allora abbiamo la tesi.