Esercizi AC1

Anna Scaramuzza

26/04/2004

N.B. Gli esercizi 1, 2, 3, 5, 6 non sono stati svolti.

Esercizio 1. Determinare come viene rappresentata la regione R delimitata dalle rette $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$ se la trasformazione è

$$w = z + (1 - 2i)$$

Soluzione. Consideriamo $z = x + iy$ allora $w = u + iv = x + 1 + i(y - 2)$ allora le rette che delimitano la regione R vengono trasformate rispettivamente nelle rette $u = 1, u = 3, v = -2, v = -1$ e quindi la regione R viene rappresentata dal rettangolo R' delimitato dalle rette $u = 1, u = 3, v = -2, v = -1$.

Esercizio 2. Determinare come viene rappresentata la regione R delimitata dalle rette $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$ se la trasformazione è

$$w = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z$$

Soluzione. Consideriamo $z = x + iy$ allora $w = u + iv = \sqrt{2}e^{\pi i/4}(x + iy) = (1+i)(x+iy) = x-y+i(x+y)$ allora le rette che delimitano la regione R vengono trasformate rispettivamente nelle rette $v = -u, v = -u + 4, v = u, v = u + 2$ e quindi la regione R viene rappresentata dal rettangolo R' che è il rettangolo R ruotato di $\pi/4$.

Esercizio 3. Determinare come si rappresentano le regioni:

1. R_1 = primo quadrante del piano complesso z;
2. R_2 = triangolo delimitato dalle rette $x = 1, y = 1, y = -x + 1$.

mediante la trasformazione $w = z^2$.

Soluzione.

1. Supponiamo che $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ quindi se $w = \rho e^{\varphi}$ si ha:

$$\begin{aligned} \rho &= r^2 \\ \varphi &= 2\vartheta \end{aligned}$$

   Questo ci dice che la regione R_1 si rappresenta nel piano complesso nel semipiano complesso w a parte immaginaria positiva.

2. Supponiamo che $z = x + iy$ quindi $w = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$. La retta $x = 1$ è rappresentata nel piano w dalla parabola $u = 1 - \frac{v^2}{4}$, la retta $y = 1$ è rappresentata nel piano w dalla parabola $u = \frac{v^2}{4} - 1$ e la retta $y = -x + 1$ è rappresentata nel piano w dalla parabola $v = \frac{1-u^2}{2}$.

Esercizio 4. Consideriamo la rappresentazione $w = f(z)$ dove $f(z)$ è una funzione analitica nel punto z_0 e tale che $f'(z_0) \neq 0$. Si dimostri che la tangente in z_0 a una qualsiasi curva passante per z_0 viene ruotata di un angolo pari all'argomento $arg(f'(z_0))$ e che la rappresentazione è conforme.

Soluzione. Supponiamo che t sia il parametro che parametrizza la generica curva C passante per z_0: $z = z(t) = x(t)+iy(t)$. La curva C viene rappresentata dalla curva C' di equazione $w = w(t) = u(t) + iv(t)$. Vale che:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= f'(z) \cdot \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

Poiché f è analitica in z_0 allora

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = f'(z_0) \cdot \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$$

Facciamo le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} &= \rho_0 e^{i\varphi_0} \\ \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0} &= r_0 e^{i\vartheta_0} \\ f'(z_0) &= R_0 e^{i\alpha_0} \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \rho_0 &= R_0 r_0 \\ \varphi_0 &= \vartheta_0 + \alpha_0 \\ &= \vartheta_0 + arg(f'(z_0)) \end{aligned}$$

La trasformazione rappresenta ogni retta ruotandola di un angolo pari a $arg(f'(z))$ e poiché una rotazione lascia invariata l'ampiezza degli angoli e il verso allora la rappresentazione è conforme.

Esercizio 5. Si determini lo jacobiano delle trasformazioni:

1. $w = f(z) = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z + (1 - 2i)$;
2. $w = z^2$.

Soluzione. 1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \\ &= \left|\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right| = 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \left|f'(z)\right|^2 \\ &= \left|2z\right| = 4(x^2+y^2)\end{aligned}$$

se $z = x + iy$.
Geometricamente si vede che una regione R del piano z di area A alla distanza r dall'origine viene rappresentata nella regione R' del piano w di area $4r^2A$; allora le regioni più lontane vengono trasportate in regioni di area tanto più grande tanto più sono lontane dall'origine.

Esercizio 6. Si dimostri che

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

Soluzione. Consideriamo le trasformazioni:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u &=& u(x,y) \\ v &=& v(x,y) \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x(u,v) \\ y &=& y(u,v) \end{array}\right. \tag{2}$$

allora

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{3}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \tag{4}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \tag{5}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \tag{6}$$

Sostituendo (5) e (6) in (3) e in (4) abbiamo che

$$\begin{aligned} du &= \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right\}du + \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right\}dv \\ du &= \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right\}du + \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right\}dv \end{aligned}$$

e quindi si determinano le seguenti condizioni:

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right\} = 1 \tag{7}$$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right\} = 0 \tag{8}$$

$$\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right\} = 0 \tag{9}$$

$$\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right\} = 1 \tag{10}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{per il teorema di Binet} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1
\end{aligned}$$

Esercizio 7. Verificare che la trasformazione bilineare fratta

$$w = e^{i\vartheta_0} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

rappresenta la parte del piano complesso z a parte immaginaria positiva nel cerchio unitario del piano complesso w. Determinare poi, una trasformazione di questo tipo, in modo che i punti $z = i$ e $z = \infty$ siano rappresentati dai punti $w = 0$ e $w = -1$ rispettivamente.

Soluzione. La trasformazione bilineare

$$w = e^{i\vartheta_0} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

rappresenta la parte del piano complesso z a parte immaginaria positiva nel cerchio unitario del piano complesso w in quanto:

$$\begin{aligned}
|w| &= \left| e^{i\vartheta_0} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| \\
&= \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|
\end{aligned}$$

Se z è un punto del piano complesso a parte immaginaria positiva allora

$$|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$$

e l'uguale vale solo se z è reale.
Determiniamo, ora, ϑ_0 e z_0 in modo che i punti $z = i$ e $z = \infty$ siano rappresentati dai punti $w = 0$ e $w = -1$ rispettivamente.

$$\begin{aligned}
e^{i\vartheta_0} \frac{i - z_0}{i - \bar{z}_0} &= 0 \qquad \text{per } z = i \\
e^{i\vartheta_0} &= -1 \qquad \text{per } z = \infty
\end{aligned}$$

Da cui segue:

$$w = -\frac{z - i}{z + i} = \frac{i - z}{z + i}$$

Esercizio 8. Determinare i punti fissi della trasformazione:

$$w = \frac{2z - 5}{z + 4}$$

Soluzione. Per definizione di punto fisso è sufficiente studiare

$$z = \frac{2z-5}{z+4}$$

che equivale a studiare

$$\frac{z^2+2z+5}{z+4} = 0$$

da cui segue che i punti fissi della trasformazione sono: $z_1 = -1+2i$ e $z_2 = -1-2i$.

Esercizio 9. Dimostrare che la trasformazione $w = 1/z$ rappresenta cerchio definito da $\left|z-3\right| = 5$ sul cerchio $\left|w+3/16\right| = 5/16$.

Soluzione. Scriviamo il cerchio in forma canonica:

$$\begin{aligned}
(z-3)(\bar{z}-3) &= 25 \\
z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 &= 25 \\
z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} - 16 &= 0
\end{aligned}$$

Ora imponiamo la trasformazione:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} - 3\frac{1}{w} - 3\frac{1}{\bar{w}} - 16 &= 0 \\
1 - 3\bar{w} - 3w - 16w\bar{w} &= 0 \\
\left(w + \frac{3}{16}\right)\bar{w} + \frac{3}{16}\left(w + \frac{3}{16} - \frac{3}{16} - \frac{1}{3}\right) &= 0 \\
\left(w + \frac{3}{16}\right)\left(\bar{w} + \frac{3}{16}\right) &= \frac{25}{16^2} \\
\left|w + \frac{3}{16}\right| &= \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

Esercizio 10. Determinare una trasformazione bilineare fratta che porta i punti z_1, z_2, z_3 del piano complesso z nei punti w_1, w_2, w_3 del piano complesso w rispettivamente.

Soluzione. Consideriamo la seguente differenza:

$$\begin{aligned}
w - w_k &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - \frac{\alpha z_k + \beta}{\gamma z_k + \delta} \\
&= \frac{(\alpha z + \beta)(\gamma z_k + \delta) - (\alpha z_k + \beta)(\gamma z + \delta)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_k + \delta)} \\
&= \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)(z - z_k)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_k + \delta)}
\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
w - w_1 &= \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)(z - z_1)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_1 + \delta)} \\
w - w_3 &= \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)(z - z_3)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_3 + \delta)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w_2 - w_1 &= \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)(z_2 - z_1)}{(\gamma z_2 + \delta)(\gamma z_1 + \delta)} \\
w_2 - w_3 &= \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)(z_2 - z_3)}{(\gamma z_2 + \delta)(\gamma z_3 + \delta)}
\end{aligned}
$$

Consideriamo ora il rapporto:

$$
\begin{aligned}
\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} &= \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)(z - z_1)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_1 + \delta)} \cdot \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)(z_2 - z_3)}{(\gamma z_2 + \delta)(\gamma z_3 + \delta)} \\
&\quad \frac{(\gamma z + \delta)(\gamma z_3 + \delta)}{(\alpha\delta - \gamma\beta)(z - z_3)} \cdot \frac{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_3 + \delta)}{(\alpha\delta - \gamma\beta)(z_2 - z_1)} \\
&= \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}
\end{aligned}
$$

Risolvendo rispetto a w in funzione di z si ottiene la trasformazione cercata.

Esercizio 11. Si determini la trasformazione bilineare che porta i punti del piano complesso z, $z = 0, z = -i, z = -1$ nei punti $w = i, w = 1, w = 0$ del piano complesso w.

Soluzione. Dobbiamo determinare una trasformazione del tipo

$$
w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}
$$

e possiamo procedere in due modi.

1. Risolvendo il sistema di equazioni:

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{\beta}{\delta} && (11) \\
1 &= \frac{-i\alpha + \beta}{-i\gamma + \delta} && (12) \\
0 &= \frac{-\alpha + \beta}{-\gamma + \delta} && (13)
\end{aligned}
$$

   dal quale si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= i\delta \\
\gamma &= -\delta \\
\alpha &= \beta
\end{aligned}
$$

   e quindi

$$
w = \frac{i\delta z + i\delta}{-\delta z + \delta} = -i\frac{z + 1}{z - 1}
$$

2. Utilizzando l'esercizio precedente:

$$
\begin{aligned}
\frac{(w - i)(1 - 0)}{(w - 0)(1 - 0)} &= \frac{(z - 0)(-i + 1)}{(z + 1)(-i - 0)} \\
\frac{(w - i)}{w} &= \frac{z(-i + 1)}{(z + 1)(-i)}
\end{aligned}
$$

Risolvendo rispetto w abbiamo:

$$-i(z+1)(w-i) \quad = \quad zw(1-i)^2$$

e sviluppando si ottiene

$$w = -i\frac{z+1}{z-1}$$