Esercizi AC1

Anna Scaramuzza

15/03/2004

Esercizio 1. Si calcoli il residuo nel punto $z = a$ delle seguenti funzioni:

1.
$$f(z) = \frac{e^z}{(z-a)(z-b)}$$

2.
$$g(z) = \frac{e^z}{(z-a)^2}$$

Soluzione. 1. Poiché $f(z) = \frac{h(z)}{k(z)}$ e il punto $z = a$ è un polo semplice per $f(z)$ allora $Res(f, a) = \frac{h(a)}{k'(a)}$, dove k' denota la derivata prima di $k(z)$:

$$\begin{aligned} Res(f(z), a) &= \frac{e^z}{z - a + z - b} \\ &= \frac{e^a}{a - b} \end{aligned}$$

2. $z = a$ è un polo di molteplicità 2 quindi non possiamo utilizzare la regola precedente. Ricordiamo che data una funzione meromorfa $f(z)$ con polo z_0, questa si può sviluppare in serie di Laurent:

$$f(z) = \sum c_i(z - z_0)$$

Vale che:

$$c_{-1} = Res(f(z), z_0)$$

Tenendo presente ciò, calcoliamo $Res(g(z), a)$:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{e^z}{(z-a)^2} \\ &= \frac{e^a}{(z-a)^2} \cdot e^{z-a} \\ &= \frac{e^a}{(z-a)^2} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z-a)^i}{i!} \right) \\ &= e^a \left[(z-a)^{-2} + (z-a)^{-1} + \frac{1}{2} + \dots \right] \end{aligned}$$

quindi

$$Res(g(z), a) = c_{-1} = e^a$$

Esercizio 2. Si calcoli il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z-1)^3}$$

nel punto $z = 1$.

Soluzione. Calcoliamo lo sviluppo in serie della funzione in un intorno di $z = 1$. per farlo consideriamo la nuova varibile $y = z - 1$, allora:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(y+1) \\ &= \frac{1}{y^3(y^2+2y+5)} \\ &= \frac{1}{5y^3} \cdot \frac{1}{\frac{y^2+2y}{5}+1} \end{aligned}$$

facciamo un'ulteriore posizione: $x = \frac{y^2+2y}{5}$ e sviluppiamo in serie la funzione $\frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x}$$

allora

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{5y^3} \cdot \frac{1}{\frac{y^2+2y}{5}+1} \\ &= \frac{1}{5y^3} \cdot \left[1 - \left(\frac{y^2+2y}{5}\right) + \left(\frac{y^2+2y}{5}\right)^2 - \left(\frac{y^2+2y}{5}\right)^3 + \dots\right] \\ &= \frac{1}{5y^3} \cdot \left[1 - \frac{2}{5}y - \frac{1}{25}y^2 + \dots\right] \end{aligned}$$

Moltiplicando si ottiene che $Res(f(z), 1) = -\frac{1}{125}$.

Esercizio 3. Si calcoli i residui della funzione meromorfa

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}$$

nei suoi due poli.

Soluzione. Osserviamo subito che:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$$

quindi $f(z)$ possiede due poli di ordine 2. Per calcolare $Res(f(z), 1)$ e $Res(f(z), -1)$ ricordiamo che il residuo di una funzione $f(z)$ nel polo z_0 di ordine n è

$$Res(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} f(z)(z-z_0)^n$$

quindi

$$\begin{aligned} Res(f(z), 1) &= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+1)^2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Res(f(z),-1) &= \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\frac{1}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si calcoli $Res(f(z),0)$ della funzione a variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{sen(z)}$$

in $z = 0$

Soluzione.

$$Res(f(z),0) = \left.\frac{1}{cos(z)}\right|_{z=1} = 1$$

Esercizio 5. Si calcolino i residui della funzione:

$$f(z) \quad = \quad \frac{e^{zt}}{(z^2+2z+2)z^2}$$

nei suoi poli, (t è un parametro arbitrario).

Soluzione. La funzione integranda possiede tre poli: $z = 0$ di ordine 2, $z = i-1$ di ordine 1, $z = -i-1$ di ordine 1. Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned} Res(f(z),0) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\frac{e^{zt}}{(z^2+2z+2)} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{te^{zt}(z^2+2z+2)-e^{zt}(2z+2)}{(z^2+2z+2)z^2} \\ &= \frac{t-1}{2} \\ Res(f(z),i-1) &= \frac{\left.e^{zt}\right|_{z=i-1}}{\left.[(2z+2)z^2+(z^2+2z+2)]\right|_{z=i-1}} \\ &= \frac{e^{(i-1)t}}{4} \\ Res(f(z),-i-1) &= \frac{\left.e^{zt}\right|_{z=-i-1}}{\left.[(2z+2)z^2+(z^2+2z+2)]\right|_{z=-i-1}} \\ &= \frac{e^{(-i-1)t}}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 6. Si calcolino i residui della funzione:

$$f(z) \quad = \quad \frac{2z^2+5}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}$$

nei suoi poli.

Soluzione. La funzione possiede quattro poli: $z = 0$ di ordine 2, $z = -2$ di ordine 3 e i due poli semplici $z = 2i$ e $z = -2i$.
Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned}
Res(f(z),0) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\frac{2z^2+5}{(z+2)^3(z^2+4)} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{4z(z+2)(z^2+4)-[3(z^2+4)+2z(z+2)](2z^2+5)}{(z+2)^4(z^2+4)^2} \\
&= \frac{-15}{2^6} \\
Res(f(z),-2) &= \lim_{z\to 2} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{2z^2+5}{z^2(z^2+4)} \\
&= \lim_{z\to -2} 12\cdot\frac{z^6+7z^4+30z^2+40}{(z^2+4)^3z^4} \\
&= \frac{63}{2^8} \\
Res(f(z),2i) &= = \frac{\left(2z^2+5\Big|_{z=2i}\right)}{2z(z+2)^3(z^2+4)+3z^2(z+2)^2(z^4+2)+4z^5(z+2)\Big|_{z=2i}} \\
&= \frac{-3}{2^8(i+1)} \\
Res(f(z),-2i) &= \frac{\left(2z^2+5\Big|_{z=-2i}\right)}{2z(z+2)^3(z^2+4)+3z^2(z+2)^2(z^4+2)+2z^3(z+2)\Big|_{z=2i}} \\
&= \frac{-3}{2^8(i-1)}
\end{aligned}$$

Esercizio 7. Si calcoli

$$\int_C \frac{2+3sin(\pi z)}{z(z-1)^2}$$

dove C è il quadrato di vertici $3(1+i)$, $3(1-i)$, $3(i-1)$, $3(-i-1)$.

Soluzione. Si vede subito che i poli della funzione integranda appartengono all'interno del quadrato, quindi per il Teorema dei Residui l'integrale sarà pari alla somma dei residui nei poli per $2\pi i$.
Computiamo i residui:

$$\begin{aligned}
Res(f(z),0) &= \frac{2+3sin(\pi z)\Big|_{z=0}}{(z-1^2)+2z(z-1)\Big|_{z=1}} \\
&= 2 \\
Res(f(z),1) &= \lim_{z\to 1} \frac{3\pi z cos(\pi z)-2-3sin(\pi z)}{z^2} \\
&= -3\pi-2
\end{aligned}$$

quindi

$$\int_C \frac{2+3sin(\pi z)}{z(z-1)^2} \quad = \quad 2\pi i(2-3\pi-2) = -6\pi^2 i$$