Esercitazioni AC1

Anna Scaramuzza

29/03/2004

Esercizio 1. Si calcoli l'integrale reale

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + cos\theta}$$

dove a è un parametro > 1

Soluzione. Passiamo al campo complesso:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + cos\theta} &= \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{iz}\frac{1}{a + \frac{1}{2(z+\frac{1}{z})}} \\
&= \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(\frac{2az+z^2+1}{2z}\right)} \\
&= -i\int_{|z|=1} \frac{dz}{2az + z^2 + 1}
\end{aligned}$$

La funzione integranda ha due poli:

$$\begin{aligned}
z_1 &= -a + \sqrt{a^2 - 1} \\
z_2 &= -a - \sqrt{a^2 - 1}
\end{aligned}$$

Poiché $a > 1$ allora $a^2 > 1$ e quindi

$$\begin{aligned}
|z_1| &= \sqrt{2a^2 - 1 - 2a\sqrt{a^2 - 1}} \\
&\geq \sqrt{1 - 2\sqrt{a^2 - 1}} \\
|z_2| &\geq 1
\end{aligned}$$

quindi per il Teorema dei Residui abbiamo:

$$-i\int_{|z|=1} \frac{dz}{2az + z^2 + 1} = 2i\pi Res\left(\frac{1}{2az + z^2 + 1}, z_1\right)$$

Calcoliamo il residuo:

$$\begin{aligned}
Res\left(\frac{1}{2az + z^2 + 1}, z_1\right) &= \frac{1}{2z + 2a|_{z=z_1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}
\end{aligned}$$

quindi

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + cos\theta} \quad = \quad -\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Esercizio 2. Si calcoli l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$$

Soluzione. Osserviamo subito che il grado del numeratore N è $deg(N) + 4 = deg(D)$, dove con D denotiamo il denominatore.
Passiamo al campo complesso e calcoliamo i poli della funzione:

$$z_i = e^{i\vartheta} \quad \text{dove} \quad \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{e} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

cioé:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ z_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ z_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ z_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

i poli non sono reali, per cui possiamo procedere come abbiamo visto nella teoria:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} &= \lim_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{dz}{1 + z^4} \\ &= \lim_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{1 + z^4} + \lim_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1 + z^4} \\ &= 2i\pi\left(Res\left(\frac{1}{1 + z^4}, z_1\right) + Res\left(\frac{1}{1 + z^4}, z_2\right)\right) \end{aligned}$$

dove con γ_1 denotiamo il segmento di estremi $-\rho, \rho$ e con γ_2 la semicirconferenza di raggio ρ, centrata nell'origine e appartenente al semipiano positivo.
Calcoliamo i residui

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{1}{1 + z^4}, z_1\right) &= \frac{1}{4z_1^3} \\ &= \frac{1}{4e^{\frac{3}{4}\pi}} \\ &= \frac{-z_1}{4} \\ Res\left(\frac{1}{1 + z^4}, z_2\right) &= \frac{1}{4z_2^3} \\ &= \frac{1}{4e^{\frac{\pi}{4}}} \\ &= \frac{-z_2}{4} \end{aligned}$$

Ora calcoliamo i limiti. Poiché vale

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1+z^4}\right| &= \left|\frac{1}{1+\rho^4 e^{4i\vartheta}}\right| \\ &\leq \frac{1}{\rho^4 e^{4i\vartheta}-1} \\ &< \frac{1}{\rho^4-1} \to 0 \quad \text{per} \rho \to \infty\end{aligned}$$

allora il secondo limite è nullo e quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= 2i\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4(i-1)}+\frac{\sqrt{2}}{4(i+1)}\right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Esercizio 3. Si calcoli l'integrale reale

$$\int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x} dx$$

Soluzione. Osserviamo subito che in x=0 il numeratore e il denominatore della funzione si annullano e tale punto si trova sull'asse reale.
Per calcolare l'integrale dobiamo passare al campo dei complessi, e nel farlo conviene considerae la funzione

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

e calcolare l'integrale di $g(z)$ su una opportuna curva chiusa.
Tale funzione ha un polo reale in $z = 0$ e quindi cercheremo una curva che lo escluda.
Consideriamo la curva data da:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \text{semicirc di raggio } \rho \\ \gamma_2 &= [-\rho, -\varepsilon] \\ \gamma_3 &= \text{semicirc di raggio } \varepsilon \\ \gamma_4 &= [\varepsilon, \rho]\end{aligned}$$

allora applicando il Teorema dei Residui abbiamo

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

L'integrale che si trova al primo membro dell'equazione si spezza in quattro integrali che consideriamo separatamente:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{-\rho}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= -\int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{e^{-iz}}{z} dz \\ \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz\end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad \to \quad 0 \text{ per } \rho \to \infty$$

in quanto

$$\begin{aligned} \left|\frac{e^{iz}}{z}\right| &\leq \frac{1}{|z|} \\ &= \frac{1}{|\rho e^{i\vartheta}|} \\ &= \frac{1}{\rho} \to 0 \text{ per } \rho \to \infty \end{aligned}$$

Infine calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{\gamma_3} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\vartheta}}}{\varepsilon e^{i\vartheta}} \varepsilon i e^{i\vartheta} d\vartheta \\ &= i \int_{\gamma_3} e^{i\varepsilon e^{i\vartheta}} d\vartheta \\ &= i \int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\vartheta}} d\vartheta \end{aligned}$$

Passiamo al limite per $\varepsilon \to 0$ e otteniamo che quest'ultimo integrale è pari a:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} i \int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\vartheta}} d\vartheta &= i \int_{\pi}^{0} \lim_{\varepsilon \to 0} e^{i\varepsilon e^{i\vartheta}} d\vartheta \\ &= -i\pi \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \to \infty, \varepsilon \to 0} \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \lim_{\rho \to \infty, \varepsilon \to 0} - \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{e^{-iz}}{z} dz \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz + 0 - i\pi \\ &= \lim_{\rho \to \infty, \varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} dz - i\pi \\ &= \lim_{\rho \to \infty, \varepsilon \to 0} \int_{0}^{+\infty} 2i \frac{\sin x}{x} - i\pi \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Osservazione 1.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Se consideriamo come curva una che comprende x=0 allora passando ai complessi e considerado la funzione $g(z)$, considerata prima abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz &= 2\pi i Res(g(z), z) \\ &= i\pi \end{aligned}$$

Il primo membro si puo' calcolare come fatto prima e si ottiene quanto si voleva.