Regole per il calcolo degli integrali reali

Anna Scaramuzza

29/03/2004

Il calcolo dei residui è uno strumento molto efficiente per il calcolo degli integrali definiti ma permette anche di calcolare certi integrali indefiniti. Vediamo i seguenti casi:

1. Tutti gli integrali del tipo:

$$\int_0^{2\pi} R(cos\theta, sin\theta)d\theta$$

dove $R(cos\theta, sin\theta)$ denota una funzione razionale dipendente da $cos\theta$, $sin\theta$.
Per calcolare questi integrali si può procedere con le usuali tecniche di integrazione, ma risulta molto più semplice procedere effettuando la seguente sostituzione:

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ d\theta &= \frac{1}{iz}dz \end{aligned}$$

e tenendo conto che

$$\begin{aligned} sin\theta &= \frac{z^2-1}{2iz} \\ cos\theta &= \frac{z^2+1}{2z} \end{aligned}$$

allora l'integrale diventa:

$$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$$

e quindi per il Teorema dei Residui:

$$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} = 2i\pi \sum_a \Big(Res(R, z_a)\Big)$$

dove z_a denota un polo della funzione integranda.

2. Passando al campo dei numeri complessi si possono calcolare anche gli integrali della forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$$

dove $R(x)$ è una funzione razionale.
Osserviamo che gli integrali di questo tipo convergono se e solo se il denominatore D di $R(x)$ ha grado maggiore del numeratore N (precisamente $degD \geq degN + 2$) e i poli della funzione razionale non sono reali.
In questo caso conviene integrare la funzione complessa $R(z)$ su una curva chiusa data da un segmento $\gamma_1 = [-\rho, \rho]$ e dalla semicirconferenza giacente nel semipiano positivo di raggio ρ che unisce gli estremi del segmento e che denoteremo con γ_2.
Se ρ è sufficientemente grande allora la curva considerata racchiude tutti i poli del semipiano positivo e quindi

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} R(x)dx \quad = \quad 2i\pi \sum_a Res(R, z_a)$$

dove z_a è un residuo che si trova nel semipiano positivo.
A questo punto, si passa al limite per $\rho \to \infty$ e si dimostra che l'integrale su γ_2 tende a zero. Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx \quad = \quad 2i\pi \sum_a Res(R, z_a)$$

3. Consideriamo una generalizzazione degli integrali precedenti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}dx$$

Abbiamo tre casi:

a) Se $R(x)$ ha uno zero di ordine almeno 2 all'infinito allora si procede come al punto 2.

b) Se invece lo zero è semplice è più conveniente cambiare la curva di integrazione. Supponiamo che $R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ e che $degN(x) > degD(x)$ così da poter dire:

$$\left|\frac{N(x)}{D(x)}\right| \leq \frac{k}{|z|}$$

Supponiamo inoltre che $R(x)$ non abbia poli sull'asse reale.
Fissiamo due punti sull'asse reale $-x_1, x_2$ e due sull'asse immaginaria $0, iy$. Consideriamo il rettangolo di vertici $(-x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(-x_1, iy)$, (x_2, iy). Se il rettangolo è abbastanza grande, questo contiene tutti i poli del semipiano positivo della funzione complessa $R(z)e^{iz}$ e quindi per il Teorema dei Residui:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} R(x)e^{ix}dx \quad = \quad \sum_a \left(Res(R(z)e^{iz}, z_a)\right)$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [-x_1, x_2] \\ \gamma_2 &= [0, iy] \\ \gamma_3 &= [x_2, -x_1] \\ \gamma_4 &= [iy, 0] \end{aligned}$$

sono i lati del rettangolo.
Consideriamo l'integrale

$$\int_{\gamma_2} R(x)e^{ix}dx$$

e cerchiamo di maggiorarlo. Fissiamo $z = x_2 + it$ con $0 \leq t \leq y$ allora $R(z)$ si può maggiorare nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\left|R(x)\right| &\leq \frac{k}{x_2} \\
\left|e^{iz}\right| &= \left|e^{ix_2 - t}\right| = e^{-y}
\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} R(z)e^{iz}dz\right| &\leq \int_{\gamma_2} \frac{k}{x_2}e^{-t}dt \\
&= \frac{k}{x_2}[1 - e^{-y}] \\
&\leq \frac{k}{x_2}
\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si prova che

$$\left|\int_{\gamma_4} R(z)e^{iz}dz\right| \leq \frac{k}{x_1}$$

Consideriamo poi $z = x + iy$, allora:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_3} R(z)e^{iz}dz\right| &\leq \frac{k}{y}\int_{\gamma_3} e^{t}dt \\
&= ke^{-y}\frac{x_1 + x_2}{y}
\end{aligned}$$

allora

$$\left|\int_{\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} R(z)e^{iz}dz\right| \leq \frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2} + ke^{-y}\frac{x_1 + x_2}{y}$$

Tale risultato vale per ogni terna di punti x_1, x_2, y. In particolare varrà per ogni terna di punti in cui x_1, x_2 sono fissati e $y \to \infty$ allora

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} R(z)e^{iz}dz\right| &\leq \frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2} + ke^{-y}\frac{x_1 + x_2}{y} \\
&\leq \frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2}
\end{aligned}$$

perché $\lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y}}{y} = 0$.
La disuguaglianza continua a valere e quindi se $x_1, x_2 \to \infty$ allora

$$\left|\int_{\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} R(z)e^{iz}dz\right| \to 0$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(z)e^{iz}dz = 2i\pi\sum_{a} Res(R(z)e^{iz}, z_a)$$

c) Se la funzione presenta dei poli sull'asse reale non si può procedere così. Supponiamo che la funzione ammetta un polo nell'origine. Fissiamo come prima i punti $-x_1, x_2, y$ e in più intorno all'origine fissiamo una semicirconferenza di raggio δ.
Poniamo

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [\delta, x_2] \\
\gamma_2 &= [0, y] \\
\gamma_3 &= [x_2, -x_1] \\
\gamma_4 &= [y, 0] \\
\gamma_5 &= [-x_1, -\delta] \\
\gamma_6 &= (-\delta, \delta)
\end{aligned}$$

In questo caso si dimostra che:

$$\int_{\gamma_6} R(z)e^{iz}dz \quad \rightarrow \quad \frac{Res(Re^{iz}, 0)}{2} \quad \text{per } \delta \rightarrow 0$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(z)e^{iz}dz \quad = \quad 2i\pi\left(\sum_a Res(Re^{iz}, z_a) + \frac{Res(Re^{iz}, 0)}{2}\right)$$