AC1 Primo esonero

7 aprile 2004

1. Calcolare, per $a > 0$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4} \ .$$

2. Calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\, dx \ .$$

3. Calcolare
$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 3\vartheta}{5 - 4\cos\vartheta}\, d\vartheta \ .$$

4. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa non costante. Si supponga che esistano $A, B > 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$ tali che
$$|f(z)| \leq A + B|z|^n \ .$$
Mostrare che f ha al più n zeri distinti.

5. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) := \exp(-\frac{1}{z^2})$. Mostrare che:

(i) f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e discutere la natura della singolarità in 0;

(ii) se $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita come $\tilde{f}(x) := \exp(-\frac{1}{x^2})$ per $x \neq 0$ e $\tilde{f}(0) := 0$, allora $\tilde{f}$ è limitata, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e analitica su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma non su tutto $\mathbb{R}$;

(iii) per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $f(D'_\varepsilon) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dove $D'_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$.

6. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione razionale con poli $a_1, \dots a_m$, tali che $a_j \notin \mathbb{Z}$ per $j = 1, \dots, m$. Si supponga anche che f abbia uno zero di ordine almeno 2 all'infinito. Allora vale la formula

$$(*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(g; a_j) \ ,$$

dove $g(z) := f(z) \cdot \mathrm{cotg}(\pi z)$.

(i) Calcolare, usando (*), la somma delle seguenti serie:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4+1} \ , \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4-1} \ .$$

(ii) Dimostrare (*).