AC1 Soluzioni del secondo esonero

10 giugno 2004

Esercizio 1.

(a) SI: per esempio $f(z) := \frac{z-i}{z+i}$,

(b) SI: per esempio $f(z) := \frac{z^2-i}{z^2+i}$,

(c) NO: la lineare fratta conserva gli angoli in TUTTI i punti dove è definita quindi anche nell'origine dove un angolo di $\pi/2$ verrebbe mandato in un angolo di π (cioè $z = 0$ sarebbe mandato in un punto della circonferenza unitaria dove c'è ovviamente un angolo piatto)

(d) SI: per esempio $f(z) := \frac{e^z-i}{e^z+i}$,

(e) NO: perché l'angolo retto tra la retta $\operatorname{Im} z = 0$ e il segmento $[0, i\pi/2]$ verrebbe mandato in un angolo NON retto che è quello tra la retta $\operatorname{Re} z = -1$ e il segmento $[-1, i/2]$

(f) SI: per esempio $f(z) := \frac{1}{z}$,

(g) NO: Per assurdo: essendo f limitata $z = 0$ è una singolarità eliminabile e quindi si può estendere f olomorfa su U. Se $f(0) \notin U$ allora $f(U)$ non sarebbe aperto: contraddizione. Quindi esiste $z_0 \in U$, $z_0 \neq 0$, $f(0) = f(z_0) \in U$. Sia $\gamma : [0,1] \to U$, $\gamma(t) := z_0 t$ il segmento che unisce 0 e z_0. Sia $\Gamma := f \circ \gamma \subset U$. Si può dimostrare (è più facile se f biettiva) che, essendo Γ un cammino chiuso ($\Gamma(0) = \Gamma(1) = f(0)$) con $\Gamma' \neq 0$ (perchè f è conforme e quindi $f' \neq 0$), $U \setminus \Gamma$ è SCONNESSO. D'altro canto $U \setminus \gamma$ è connesso, f è continua e quindi $f(U \setminus \gamma) = U \setminus \Gamma$ dovrebbe essere CONNESSO: contraddizione!

(h) SI: per esempio $f(z) := e^{1/z}$. Si noti che non può esitere f biettiva, cioè $U \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ NON sono conformemente equivalenti. Infatti, per assurdo, se una tale f esistesse, chiamando g l'inversa di f, g sarebbe estendibile (perché limitata) a tutto $\mathbb{C}$ e quindi per il teorema di Liouville g sarebbe costante: contraddizione!

Esercizio 2. A meno di rotazioni si può supporre che $f(-1) = -1$. Inoltre l'angolo piatto in 0 formato dai segmenti $[0, -1]$ e $[0, 1]$ deve conservarsi e quindi $f(1) = 1$. Siccome f è una mappa conforme che fissa tre punti f è l'identità.

Esercizio 3.

(a) Ω_1^c. Infatti se $z \in \Omega_1^c$ allora $\Omega_1 \setminus \{z\} = \Omega_1$ che è semplicemente connesso. Se invece $z \in \Omega_1$ allora, per $r > 0$ sufficientemente piccolo, $\gamma := \partial D_r(z) \subset \Omega_1$ ha indice $1 \neq 0$.

(b) NO: per esempio $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus \{z = x,\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$ e $\Omega_2 := \mathbb{C} \setminus \{z = x,\ x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$; allora $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) SI: infatti sia $z \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)^c$ e γ cammino chiuso in $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Verifichiamo che $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$. Esiste $j \in \{1, 2\}$ tale che $z \in \Omega_j^c$. Essendo Ω_j semplicemente connesso $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.

Esercizio 4. Si ha $\cos(\pi w) = \sin(\pi(w + \frac{1}{2}))$. Usando l'espressione di $\sin(\pi\zeta)$ come prodotto infinito e raggruppando i termini $n \in \mathbb{N}$ e $-n-1$, si ottiene, per $w = \sqrt{z}$,

$$\cos(\sqrt{z}) = \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{4z}{\pi^2(2n+1)^2}\right) .$$

Quindi il genere è zero.