Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 1
Venerdì 27 febbraio 2004

1. Trovare i valori di:
   (a) $(1+2i)^3$
   (b) $\frac{5}{-3+4i}$
   (c) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$
   (d) $(1+i)^n+(1-i)^n$

2. Calcolare:
   (a) $\sqrt[4]{i}$
   (b) $\sqrt[4]{-i}$

3. Si pensi di vivere nel piano complesso. Partendo dall'origine si vada un'unità a est, poi per la stessa lunghezza a nord, poi 1/2 della precedente lunghezza a ovest, poi 1/3 della precedente lunghezza a sud, poi 1/4 della precedente lunghezza a est e cosi via. Supponendo di viaggiare alla velocità di un'unità l'ora, dopo quanto tempo e a quale punto arriveremo?

4. Dimostrare che nel piano complesso non esistono triangoli equilateri con i vertici tutti in $\mathbb{Z}[i]$.

5. Se $g(w)$ e $f(z)$ sono funzioni olomorfe mostrare che $g(f(z))$ è anch'essa analitica

6. Dimostrare che una funzione olomorfa non costante non può:
   (a) avere valore assoluto costante
   (b) essere a valori reali
   (c) essere a valori puramente immaginari
   (d) avere argomento costante

7. Dimostrare rigorosamente che $f(z)$ e $\overline{f(\overline{z})}$ sono analitiche simultaneamente.

8. Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ponga $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k)!}$ $\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ e $\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$
   (a) Verificare che il raggio di convergenza di tali serie è infinito
   (b) Verificare che valgono le uguaglianze $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ e $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
   (c) Dimostrare la formula di addizione per l'esponenziale complesso: $e^{z+w} = e^z e^w$
   (d) Verificare che $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
   (e) Verificare che $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$