Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 2
Giovedì 4 marzo 2004

1. Dimostrare che una funzione olomorfa non costante non può:
   (a) avere valore assoluto costante
   (b) essere a valori reali
   (c) essere a valori puramente immaginari
   (d) avere argomento costante

2. (a) Dimostrare che $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ è derivabile in senso complesso (olomorfa) in $x_0 + iy_0 \Leftrightarrow u, v$ sono differenziabili in (x_0, y_0) e le loro derivate parziali soddisfano le equazioni di C-R in (x_0, y_0).
   (b) Siano ora $u(x,y) = x^2$ e $v(x,y) = y^3$. Determinare $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c. \ f = u + iv$ è derivabile in $z = x + iy$ in senso complesso$\}$.
   (c) Nel caso precedente trovare l'insieme $\Omega' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c. \ \triangle u = \triangle v = 0$ in (x,y) e u, v sodd. C-R in $(x,y)\}$.
   (d) Come mai $\Omega \neq \Omega'$? Se Ω fosse aperto, Ω' coinciderebbe con Ω?

3. Trovare i valori di $z \in \mathbb{C}$ per cui e^z è uguale a:
   (a) 2
   (b) -1
   (c) i
   (d) $-i/2$
   (e) $-1-i$
   (f) $1+2i$

4. Calcolare tutti i valori di:
   (a) 2^i
   (b) i^i
   (c) $(-1)^{2i}$

5. Espandere $\frac{2z+3}{z+1}$ in serie di potenze in $z = 1$ e determinarne il raggio di convergenza.

6. Si supponga che il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum a_n z^n$ sia R. Calcolare, se possibile, il raggio di convergenza delle serie
   (a) $\sum a_n z^{2n}$
   (b) $\sum a_n^2 z^n$

7. Calcolare $\int_{|z|=r} x \ dz$, percorrendo la circonferenza in senso antiorario.