Tutorato 6

Martedì 27 aprile 2004

Definizione: siano U, V aperti in $\mathbb{C}$. $f : U \to V$ si dice isomorfismo (sott. analitico) se f è olomorfa, invertibile e con inversa olomorfa. Se $V = U$ f si dice automorfismo di U.

Notazione: chiamiamo D il cerchio aperto di raggio 1 e centro 0 in $\mathbb{C}$.

1. Vero o Falso? Dimostrare o dare un controesempio.
   (a) Sia U aperto in $\mathbb{C}$. Gli automorfismi di U, $\mathrm{Aut}(U)$, costituiscono un gruppo.
   (b) Siano U, V aperti in $\mathbb{C}$. Se $U \simeq V$ allora $\mathrm{Aut}(U) \simeq \mathrm{Aut}(V)$.
   (c) D è omeomorfo a $\mathbb{C}$.
   (d) D è isomorfo a $\mathbb{C}$.
   (e) Se f è olomorfa su un aperto U convesso t.c. $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in U$ allora f è invertibile.

2. **Automofismi di D**
   (a) Mostrare che $f(z) = e^{i\phi} z$ è un automorfismo di D per ogni $\phi \in [0, 2\pi)$.
   (b) Sia α un numero complesso di modulo < 1. Mostrare che $g_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$ è un automorfismo di D che manda α in 0.
   (c) Dimostrare il lemma di Schwarz:

   Lemma 0.0.1. *Sia $f : D \to D$ una funzione olomorfa t.c. $f(0) = 0$. Allora*

   i. $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in D$.

   ii. Se esiste $z_0 \neq 0$ t.c. $|f(z_0)| = |z_0|$ allora esiste α di modulo 1 t.c. $\forall z \in D$ $f(z) = \alpha z$, ovvero f è una rotazione attorno all'origine.

   (d) Concludere che ogni automorfismo di D è, a meno di rotazioni, un g_α, ovvero se f è un automorfismo di D allora esistono α e ϕ t.c. per ogni $z \in D$ $f(z) = e^{i\phi} \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$.
   (e) Dimostrare, infine, che se $f \in \mathrm{Aut}(D)$ che fissa l'origine allora f è una rotazione.

3. Sia f olomorfa su D. Si assuma che $|f(z)| < 1$ su D. Se f fissa due punti allora f è l'identitá.

4. Trovare un omeomorfismo di D che non sia estendibile a $\overline{D}$. Concludere che esistono omeomorfismi di D che non sono automorfismi.

5. Trovare una funzione razionale fratta che mappa $0, 1, \infty$ in $1, -1, i$ e una che mappa $1, -1, i$ in $1, i, -1$.

6. Sia α reale, $0 \leq \alpha < 1$. Sia U_α l'insieme aperto ottenuto da D togliendo il segmento $[\alpha, 1)$.
   (a) Trovare un isomorfismo tra U_α e U_0.
   (b) Sia $D' := D \cap \{z \text{ t.c. } \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Trovare un isomorfismo tra U_0 e D' e uno tra U_α e D'.