Tutorato 7
Martedì 4 maggio 2004

Definizione: siano U, V aperti in $\mathbb{C}$. $f : U \to V$ si dice isomorfismo (sott. analitico) se f è olomorfa, invertibile e con inversa olomorfa. Se $V = U$ f si dice automorfismo di U.

Notazione: chiamiamo D il cerchio aperto di raggio 1 e centro 0 in $\mathbb{C}$.

1. Ripassare l'esercizio 2 del tutorato 6.
2. Sia f olomorfa su D. Si assuma che $|f(z)| < 1$ su D. Usando il lemma di Schwarz si dimostri che se f fissa due punti allora f è l'identitá.
3. Si consideri la funzione $f(z) = e^{\frac{i}{1-|z|}}z$. Si dimostri che f è un omeomorfismo di D in se stesso. f è estendibile ad una funzione continua su $\overline{D}$? f è un automorfismo?
4. Sia H il semipiano superiore ($H = \{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$)
   (a) Mostrare che $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ è un isomorfismo di H con D
   (b) Trovare un isomorfismo tra il primo quadrante $Q = \{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ e D.
   (c) Dare almeno tre esempi distinti di isomorfismi di H.
5. Sia $U = \mathbb{C} - \overline{D}$ e $W = \mathbb{C} - [-2, 2]$. Sia $f(z) = z + \frac{1}{z}$.
   (a) Dimostrare che f è un isomorfismo tra U e V.
   (b) Trovare l'immagine di ∂D tramite f.
   (c) In che modo f trasforma le circonferenze centrate nell'origine e di raggio > 1? E in che modo trasforma le semirette radiali uscenti da ∂D?
6. Si consideri la funzione $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Si trovino le immagini, tramite f
   (a) della retta reale $\mathbb{R}$
   (b) della retta immaginaria $i\mathbb{R}$
   (c) di ∂D
   (d) della retta orizzontale $\mathrm{Im}(z) = 1$
7. Sia f una funzione olomorfa su un aperto connesso Ω. Supponiamo che su Ω $|f(z)^2 - 1| < 1$. Allora $\mathrm{Re}(f(z))$ o è sempre strett. positiva o sempre strett. negativa.