Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 8
Martedì 18 maggio 2004

Sia u_n una successione di numeri complessi diversi da 0. Diremo che $\prod u_n$ converge assolutamente se:

a. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

b. $\sum \log(u_n)$ converge assolutamente. Per un numero finito di n prendiamo una qualsiasi determinazione di $\log u_n$, ma se n è sufficientemente grande allora possiamo scrivere $u_n = 1 - \alpha_n$ con $|\alpha_n| < 1$ e quindi definiamo $\log u_n$ prendendo l'usuale serie per $\log(1 - \alpha_n)$.

1. Sia $\{\alpha_n\}$ una successione di numeri complessi diversi da 1. Dimostrare che se $\sum \alpha_n$ converge assolutamente allora $\prod(1-\alpha_n)$ converge assolutamente.

2. Sia f una funzione intera ed n un numero naturale. Dimostrare che gli zeri di f hanno tutti ordine divisibile per n se e solo se esiste g funzione intera t.c. $f = g^n$.

3. Se possibile, scrivere come prodotto infinito una funzione intera con zeri di ordine uno

   (a) nei numeri naturali

   (b) nei reciproci dei numeri naturali

4. Dimostrare che $\prod_{n\geq 2}(1-\frac{1}{n^2})$ converge assolutamente e calcolarne il limite.

5. Mostrare che se $|z| < 1$ allora $(1+z)(1+z^2)(1+z^4)...(1+z^{2^n})...$ converge assolutamente e il suo limite è $\frac{1}{1-z}$.

6. Dimostrare che il campo delle funzioni meromorfe su un aperto Ω, $M(\Omega)$, è il campo dei quozienti dell'anello delle funzioni olomorfe su Ω, $H(\Omega)$. (Sugg.: l'unica cosa non ovvia da verificare è che ogni funzione meromorfa si può scrivere come quoziente di funzioni olomorfe).