Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 9
Martedì 25 maggio 2004

Sia u_n una successione di numeri complessi diversi da 0. Diremo che $\prod u_n$ converge assolutamente se:

a. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

b. $\sum \log(u_n)$ converge assolutamente. Per un numero finito di n prendiamo una qualsiasi determinazione di $\log u_n$, ma se n è sufficientemente grande allora possiamo scrivere $u_n = 1 - \alpha_n$ con $|\alpha_n| < 1$ e quindi definiamo $\log u_n$ prendendo l'usuale serie per $\log(1-\alpha_n)$.

1. Dire se $\prod e^{\frac{1}{n}}$ e $\prod e^{\frac{1}{n^2}}$ convergono assolutamente e, se convergono, calcolarne il limite.
2. Dire se converge assolutamente $\prod_{k\geq 1}(1 + \frac{\cos k\pi}{k^2+1})$
3. Trovare l'insieme di convergenza assoluta di $\prod_{k\geq 1}(1 + \frac{e^{-kz}}{k^2})$.
4. Scrivere una funzione intera che si annulla in n^2, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
5. Dimostrare che se $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z_n|}$ converge allora $\prod_{n\geq 1}(1 - \frac{z}{z_n})$ definisce una funzione intera.
6. Trovare il massimo disco $D(1, r)$ (1 è il centro, r il raggio) su cui $f(z) = z^4$ è iniettiva.
7. *Dimostrare che $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$. Usando il termine costante dello sviluppo di Laurent in $z = 0$ di $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ mostrare che $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.