Regole per il calcolo degli integrali reali

Anna Scaramuzza

01/04/2004

1. Gli integrali reali del tipo:

$$\int_0^\infty x^a R(x)dx$$

dove a è un'esponente reale che si può supporre variare nell'intervallo (0,1). Perché l'integrale converga si deve richiedere che la funzione $R(z)$ abbia uno zero di ordine almeno 2 all'infinito e al più un polo semplice nell'origine.
Per risolvere tali integrali si effettua la sostituzione $x = t^2$ e così l'integrale diventa:

$$\int_0^\infty z^a R(z)dz \quad = \quad 2\int_0^\infty t^{2a+1}R(t^2)dt$$

Per la funzione z^{2a} possiamo supporre che l'argomento vari tra $-\pi a$ e $3\pi a$, in quanto la funzione è ben definita ed è analitica nella regione ottenuta omettendo l'asse immaginario negativo. A questo punto, utilizziamo il Teorema dei Residui integrando su una curva chiusa data da due segmenti: uno lungo l'asse positivo reale e uno lungo l'asse negativo reale e da due semicirconferenze centrate nell'origine del piano complesso di raggio ε e ρ. Si dimostra che gli integrali sulle circonferenze tendono a zero per $\varepsilon \to 0$ e $\rho \to \infty$ quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} z^{2a+1}R(z^2)dz &= \int_0^\infty (z^{2a+1} + (-z)^{2a+1}R(z^2)dz \\ &= (1 - e^{2\pi ia})\int_0^\infty z^{2a+1}R(z^2)dz\end{aligned}$$

perché $(-z)^k = (e^{i\pi}z)^k$.
A questo punto possiamo calcolare l'integrale utilizzando le solite regole di integrazione. Osserviamo ancora che per calcolare l'integrale dovremo calcolare i residui della funzione $z^{2a+1}R(z^2)$ su tutto il semipiano positivo complesso, ma questo equivale a determinare i residui della funzione $z^a R(z)$ su tutto il piano complesso. In questo caso allora l'argomento di z^a varierà nell'intervallo $(0, 2\pi a)$.