**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004**
**ALGEBRA 1**
**Prof. M. Fontana**
**Tutorato 4 - Andrea Cova (24 ottobre 2003)**

1. Siano X, Y e Z tre insiemi. Mostrare che:
   (a) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$;
   (b) $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$;
   (c) $X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)$.

2. Determinare quali tra le proprietà riflessiva (**R**), simmetrica (**S**), transitiva (**T**), antisimmetrica (**AS**) totale (**TT**) sono soddisfatte dalle seguenti relazioni:
   (a) Nell'insieme delle rette del piano affine reale:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è parallela (ma *non* coincidente con ) x';
   (b) Nell'insieme delle rette del piano euclideo reale:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è perpendicolare a x';
   (c) Fissato $S \neq \emptyset$, nell'insieme $X := P(S)$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è disgiunto da x';
   (d) Nell'insieme $X := P(S)$, come in (c):
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è un sottoinsieme di x';
   (e) Nell'insieme $X := \mathbf{Z}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow x - x'$ è un multiplo di 5;
   (f) Nell'insieme $X := \mathbf{N}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow x \geq x'$;
   (g) Nell'insieme $X := \mathbf{N}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x è un multiplo di x';
   (h) Nell'insieme $X := \mathbf{N}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow xx' = z^2$, per qualche $z \in \mathbf{N}$;
   (i) Nell'insieme $X := \mathbf{Z}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow |x| = |x'|$;
   (j) Nell'insieme $X := \mathbf{Z}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow xx' > 0$;
   (k) Nell'insieme $X := \mathbf{Z}$:
   $x \rho x' :\Leftrightarrow$ x ed x' hanno lo stesso numero di cifre (nella usuale scrittura decimale).

3. Mostrare che le seguenti relazioni sono relazioni di equivalenza e descrivere esplicitamente l'insieme-quoziente:

(a) in **Z**, la relazione: $x \rho x' :\Leftrightarrow |x| = |x'|$;
(b) in **Z**, la relazione: x "ha la stessa parità di" x' (cioè: x è in relazione con x' se x ed x' sono entrambi pari oppure entrambi dispari);
(c) in **R**, la relazione: x "differisce per un multiplo intero di $2\pi$ da" x' (cioè, $x = x' + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$);
(d) in **R**, la relazione x "ha la stessa parte intera di" x' (cioè: $[x] = [x']$);
(e) in **R**, la relazione: x "differisce per un intero da" x' (cioè: $x = x' + k$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$);
(f) sia X il piano [o lo spazio] affine reale ed $x_0$ un punto di X; nell'insieme $X \setminus \{x_0\}$ la relazione: x "è allineato con $x_0$ e con" x';
(g) in $X := \mathbf{R} \times \mathbf{R} \setminus \{(0, 0)\}$ la relazione:
(h) y) $\rho$ (x', y') $:\Leftrightarrow x'^2 y = x^2 y'$;
(i) in **C**, la relazione: $z \rho z' :\Leftrightarrow z' = z + (a + i\, b)$ con $a, b \in \mathbf{Z}$;
(j) fissato un insieme S finito non vuoto, in $X := P(S)$ la relazione: x "ha lo stesso numero di elementi di" x';
(k) in **C**, la relazione: $z \rho z' :\Leftrightarrow z - z' = \overline{z' - z}$;
(l) in **C**, la relazione: $z \rho z' :\Leftrightarrow z - z' = z - z'$.