Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a. a. 2003/2004
ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 5 - Andrea Cova (31 ottobre 2003)

1. Sia n _ 2 fissato. Mostrare che:
- (a) a … b (mod n), c … d (mod n) _ a +c … b +d (mod n);
- (b) a … b (mod n) c … d (mod n) _ ac … bd (mod n);
- (c) a … b (mod n) _ a^k … b^k (mod n), per ogni k _ 1;
- (d) a … b (mod n), m_n _ a … b (mod m);
- (e) a … b (mod n), m _ 0, _ am … bm (mod nm);
- (f) a … b (mod n), d _ 0, d_a, d_b, d_n _ a/d … b/d (mod n/d);
- (g) ac … bc (mod n), d = MCD(c, n) _ a … b (mod n/d);
- (h) ac … bc (mod n), MCD(c, n) = 1 _ a … b (mod n);
- (i) ac … bc (mod p), p primo, p_c _ a … b (mod p);
- (j) a … b (mod n),a … b (mod m) _ a … b (mod mcm(n, m)).

  Si noti che, in (h), la condizione sul MCD è essenziale per effettuare la cancellazione (dare un esempio in cui *non* si può effettuare la cancellazione).

2. *Alcuni criteri di divisibilità*. Sia a un intero non nullo. Scriviamo_a_in forma decimale:

$$\_a\_=a_m*10^m+a_{m-1}*10^{m-1}+...+a_1*10+a_0$$

con $0 \le a_i \le 9$, $0 \le i \le m$, e a_m _ 0.Poniamo:

$$S(a) := \Sigma a_i,\ A(a) := \Sigma (-1)^i a_i .$$

Dimostrare i seguenti criteri di divisibilità:
- (a) 2_a ⌠ 2_a_0;
- (b) 3_a ⌠ 3_S(a);
- (c) 4_a ⌠ 4_(a_1*10 +a_0);
- (d) 5_a ⌠ 5_a_0;
- (e) 9_a ⌠ 9_S(a);
- (f) 11_a ⌠ 11_A(a).

Mostrare che:
- Sia a un intero fissato e sia a' *l'intero ottenuto invertendo l 'ordine delle cifre di* a, nella sua scrittura decimale (ad es. a =1324, allora a' =4231). Mostrare che: 9_(a -a').
- Si dice **palindrome** un numero a ⌊ N tale che a' = a (stessa notazione del punto precedente). Mostrare che, se a è una palindrome con un numero pari di cifre (ad es. 435534), allora: 11_a.
- Stabilire se: 1345 è divisibile per 9; 57417 è divisibile per 7; 59741 è divisibile per 11; 951214 è divisibile per 4.

3. Determinare un inverso aritmetico di 32 modulo 625.

4. Risolvere, quando è possibile, le seguenti congruenze lineari:

9X … 27 mod 20; 9X … 27 mod 18; 9X … 12 mod 18; 9X … 18 mod 12;

150X … 1 mod 727; 150X … 11 mod 727; 150X … 11 mod 39275; 150X … 39 mod 231.

5. a) dimostrare il Teorema di Wilson: sia p un numero primo, allora (p – 1))! … -1 (mod p);

b) dimostrare che il Teorema di Wilson si inverte, infatti: n è primo ⌠ (n – 1))! … - 1 (mod n).

6. Determinare per ognuna delle seguenti relazioni quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono soddisfatte ed in caso che la relazione sia di equivalenza determinare le classi di equivalenza.
- Sia $\mathbf{R}^2$ = {(*x* ,*y*) : *x, y* ⌊**R**}.
  - a) $(x_1, y_1)\ \rho\ (x_2,y_2)$ ⌠ ∃λ⌊**R**,λ _ 0, tale che $\lambda x_1 = x_2$ e $\lambda y_1 = y_2$
  - b) $(x_1, y_1)\ \rho\ (x_2, y_2)$ ⌠ $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \le 1$
  - c) $(x_1, y_1)\ \rho\ (x_2, y_2)$ ⌠ $x_1 y_1 = x_2 y_2$
- Sia $\mathbf{Q}^x$ = {*q* ⌊ **Q**; *q* _ 0}.
  - d) *xρ y* ⌠ *xy > 0*

e) $x \rho y$ ⌠ $x^2 + y^2$ ⌊ **Z**

f) $x \rho y$ ⌠ x_ y _ 1

• Sia *C* l 'insieme composto dalle circonferenze del piano. Data C ⌊ *C* denotiamo con *r*(C) il raggio di C e con *c* (C) il suo centro.

g) $C_1 \rho C_2$ ⌠ $C_1 \;\; C_2$ _ Ø

h) $C_1 \rho C_2$ ⌠ r (C_1) = r (C_2)

i) $C_1 \rho C_2$ ⌠ c (C_1) = c (C_2)