

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 10 - Andrea Cova (9 dicembre 2003)

1. Sia G un gruppo e siano H, K sottogruppi di G . Mostrare che:
 - (a) $H \cap K$ è un sottogruppo di G ;
 - (b) Se H è normale in G allora $H \cap K$ è un sottogruppo normale di K (non necessariamente di G , dare un esempio);
 - (c) Se H e K sono normali in G , allora $H \cap K$ è un sottogruppo normale di G ;
 - (d) Se G è finito e $\text{MCD}(|H|, |K|) = 1$ (dove $|H|$ e $|K|$ sono gli ordini rispettivamente di H e K), allora $H \cap K = \{e\}$;
 - (e) $H \cup K$ non è necessariamente un sottogruppo di G (dare un esempio);
 - (f) $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$ è un sottogruppo di G se e soltanto se $HK = KH$;
 - (g) Se H è normale in G , allora $HK = \langle H \cup K \rangle$ (sottogruppo generato da $H \cup K$);
 - (h) Se H e K sono normali in G , allora HK è un sottogruppo normale di G ;
 - (i) Se H e K sono normali in G e $H \cap K = \{e\}$, allora $hk = kh$, comunque scelti $h \in H$ e $k \in K$.
2. Sia U il sottogruppo di (\mathbb{C}^*, \cdot) formato da tutti i numeri complessi di modulo uguale ad 1.
 - (a) Verificare che l'applicazione $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (U, \cdot)$ definita da $r \mapsto \cos 2\pi r + i \sin 2\pi r$ è un omomorfismo.
 - (b) Usando il Teorema Fondamentale di Omomorfismo, dimostrare che $U \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
3. Sia X un insieme non vuoto. Sia $(P(X), +, \cdot)$ l'anello di tutti i sottoinsiemi di X dove, presi comunque $A, B \in P(X)$, si pone per definizione:

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B \text{ (differenza simmetrica);}$$

$$A \cdot B := A \cap B.$$
 - (a) Mostrare che $P_f(X) := \{A \in P(X) : \text{Card}(A) \text{ è finita}\}$ è un ideale di $P(X)$.
 - (b) Per ogni $Y \subset X$ mostrare che $P(Y)$ è un ideale principale (cioè generato da un elemento) di $P(X)$.
 - (c) Per ogni $Y \subset X$, verificare che l'applicazione: $P(X) \rightarrow P(Y), A \mapsto A \cap Y$ è un omomorfismo suriettivo di anelli. Determinarne il nucleo.
 - (d) Per ogni $Y \subset X$, mostrare che l'applicazione:

$$P(X) \rightarrow P(Y) \times P(X \setminus Y), A \mapsto (A \cap Y, A \cap (X \setminus Y))$$
 è un isomorfismo di anelli.
4. Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ pari;} \\ -1, & \text{se } x \text{ dispari.} \end{cases}$$
 Se ρ_f è la relazione di equivalenza associata a f , cioè $x \rho_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$,
 - (a) Determinare la classe di equivalenza di ogni elemento di \mathbb{N} ;
 - (b) Determinare l'insieme quoziente \mathbb{N}/ρ_f ;
 - (c) Applicare il teorema di decomposizione per le funzioni.
5. Nel gruppo S_n sia $\pi = (i j)$ una trasposizione e σ una qualsiasi permutazione tale che $\sigma(i) = h$ e $\sigma(j) = k$; dimostrare che $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}$ è ancora una trasposizione. Nel caso particolare $n=4$ si sfrutti tale proprietà per dimostrare che il sottogruppo $V = \{\text{id}, (12) \circ (34), (13) \circ (24), (14) \circ (23)\}$ di S_4 è normale.
6. Sia $R = \{h/(2K+1) : h, k \in \mathbb{Z}\}$; si domanda: i) R è un sottoanello di \mathbb{Q} ? ii) R è un campo?
7. Sia G un gruppo finito; dimostrare che l'applicazione φ di G in G tale che $\varphi(x) = x^2$ è un automorfismo di G se, e solo se, G è abeliano e non contiene elementi x , diversi dall'unità, tali che $x^2 = u$.
8. Dimostrare che il sottoinsieme di \mathbb{C} , $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, è un anello (commutativo unitario). Tale anello si chiama l'anello degli interi di Gauss.
9. Dimostrare che i sottoinsiemi di \mathbb{C}

$$\mathbb{Q}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}; \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$
 sono campi.