Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
AL 1
Esercizi per casa, V prova

1. Siano $\sigma, \tau \in S_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare σ^{-1} e τ^{-1}.
(b) Scrivere σ e τ come prodotto di cicli disgiunti.
(c) Determinare l'ordine di σ e di τ.
(d) Calcolare $\sigma\tau$ $(:= \tau \circ \sigma)$ e $\tau\sigma$ $(:= \sigma \circ \tau)$.
(e) Determinare l'ordine di $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

2. Sia $A = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\,, 3 \nmid n\}$. Dimostrare che A è un anello rispetto alla somma e al prodotto fra numeri razionali. Verificare che A non è un campo.

3. Siano $R = \{[0]_{30}, [6]_{30}, [12]_{30}, [18]_{30}, [24]_{30}\}$ $(\subset \mathbb{Z}/\equiv_{30})$ e $A = \{[0]_{20}, [5]_{20}, [10]_{20}, [15]_{20}\}$ $(\subset \mathbb{Z}/\equiv_{20})$.

Determinare se R e A sono anelli (sottoanelli rispettivamente di $\mathbb{Z}/\equiv_{30}$ e di $\mathbb{Z}/\equiv_{20}$),se sono unitari, se hanno divisori dello zero, se sono campi.

4. Determinare quali dei seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$:

(a) $X^2 + X + 1$
(b) $X^4 + 4X^2 + 3$
(c) $X^{57} + 49X^{23} + 21X^{17} + 77X^6 + 399$

5. Scomporre il polinomio $X^4 - 4$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$.

6. Dimostrare che $X^2 + X + 1$ è l'unico polinomio irriducibile di grado 2 su $\mathbb{Z}/\equiv_2$.

7. Siano $f_1(X) = 2X^2 + 4X + 4$ e $f_2(X) = X^3 - X$. Determinare $\mathrm{MCD}(f_1, f_2)$ in $\mathbb{Q}[X]$.