AL 1
Esercizi per casa, I prova
Soluzioni

1(a) Applicando due volte la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione e utilizzando il fatto che $A \cup A^* = B \cup B^\star = S$, si ottiene: $(\mathbf{B} \cap \mathbf{A}^*) \cup (\mathbf{B}^* \cap \mathbf{A}) = (B \cup (B^* \cap A)) \cap (A^* \cup (B^* \cap A)) = (B \cup B^*) \cap (B \cup A) \cap (A^* \cup B^*) \cap (A^* \cup A) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A}^* \cup \mathbf{B}^*) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^* = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \smallsetminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$.

1(b) Sia per assurdo $A \neq \emptyset$. Prendiamo allora $x \in A$. Ci sono due possibilità: $x \in B$ o $x \notin B$. Se $x \in B$, $x \in A \cap B$, quindi $x \notin (A \cap B)^* = A^* \cup B^*$. Quindi $x \notin (A \cup B) \cap (A^* \cup B^*) = B$, assurdo. Se invece $x \notin B$, si ha che $x \in A, x \in B^*$ e quindi $x \in (A \cup B) \cap (A^* \cup B^*) = B$, assurdo.

2(a) Sia $C \in \mathcal{P}(A \smallsetminus B)$, $C \neq \emptyset$. Allora C è un sottoinsieme di A e chiaramente non è un sottoinsieme di B. Quindi $C \in \mathcal{P}(A) \smallsetminus \mathcal{P}(B)$.
Nota: In una precedente versione dell'esercizio si chiedeva di dimostrare $\mathcal{P}(A \smallsetminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \smallsetminus \mathcal{P}(B)$. Questo è sempre falso, dato che, per ogni A e B, si ha che $\emptyset \in \mathcal{P}(A \smallsetminus B)$, mentre $\emptyset \notin \mathcal{P}(A) \smallsetminus \mathcal{P}(B)$ (dato che $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $\emptyset \in \mathcal{P}(B)$).

2(b) E' falso. Si prendano ad esempio $A = \{a, b\}$ e $B = \{b, c\}$ e si noti che $A \in \mathcal{P}(A) \smallsetminus \mathcal{P}(B)$ ma $A \notin \mathcal{P}(A \smallsetminus B) \smallsetminus \{\emptyset\}$.

3(a) Falsa. Si prendano ad esempio $A = \{a, b\}, B = \{b, c\}, C = \{a, c\}$ e si noti che $A \cup (B \smallsetminus C) = A$ e $(A \cup B) \smallsetminus C = \{b\}$. In effetti, si può dimostrare che è sempre vera l'inclusione opposta, cioè che $(A \cup B) \smallsetminus C \subseteq A \cup (B \smallsetminus C)$. Infatti, $(A \cup B) \smallsetminus C = (A \cup B) \cap C^* \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C^*) = A \cup (B \cap C^\star) = A \cup (B \smallsetminus C)$.

3(b) Vera. Infatti $A \smallsetminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^* = A \cap B^* \cap C^* = A \cap B^* \cap A \cap C^* = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C)$.

3(c) Vera. Infatti $(A \cup (C \smallsetminus B)) \cap ((B \smallsetminus C) \smallsetminus A) = (A \cup (C \cap B^*)) \cap (B \cap C^* \cap A^*) = (A \cap B \cap C^* \cap A^*) \cup (C \cap B^* \cap B \cap C^* \cap A^*) = \emptyset$.

4. Per esempio si può procedere in questo modo: indichiamo con S l'insieme degli studenti delle scuole superiori, con M l'insieme degli studenti interessati alla matematica, con F l'insieme degli studenti interessati alla fisica, e poniamo $\text{Card}(S) = 100$, $\text{Card}(M) = 45$, $\text{Card}(F) = 35$ (quindi $\text{Card}(M^*) = 55$ e $\text{Card}(F^*) = 65$). Vogliamo stimare $\text{Card}(M^* \cap F^*)$. Sappiamo che $\text{Card}(M^* \cap F^*) = \text{Card}(M^*) + \text{Card}(F^*) - \text{Card}(M^* \cup F^*)$ e che $65 = \text{Card}(F^*) \leq \text{Card}(M^* \cup F^*) \leq \text{Card}(S) = 100$. Quindi $20 = 55 + 65 - 100 \leq \text{Card}(M^* \cap F^*) \leq 55 + 65 - 65 = 55$.