AL 1
Esercizi per casa, II prova
Soluzioni

1(a) Per $n=1$ si ha $3+1=4$ che è ovviamente divisibile per 4. Sia allora $3^{2n-1}+1$ divisibile per 4. Vogliamo dimostrare che $3^{2(n+1)-1}+1 = 3^{2n+1}+1$ è divisibile per 4. Ma $3^{2n+1}+1 = 9\cdot 3^{2n-1}+9-8 = 9(3^{2n-1}+1)-8$. Dato che $3^{2n-1}+1$ è divisibile per 4 per ipotesi induttiva e 8 è ovviamente divisibile per 4, si ha che $3^{2n+1}+1$ è divisibile per 4.

1(b) Per $n=2$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = 14/24 > 13/24$. Sia allora $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > 13/24$. Vogliamo dimostrare $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2} > 13/24$. Si ha $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2} = (\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}) - \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} > 13/24 - \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$ per l'ipotesi induttiva. Basta quindi dimostrare che $-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} > 0$ per ottenere la tesi. Tale dimostrazione è elementare.

2(a) $\mathrm{MCD}(220,168) = 4 = 220\cdot 13 - 168\cdot 17$, m.c.m. $(220,168) = 9240$.

2(b) $\mathrm{MCD}(3080,2376) = 88 = 2376\cdot 13 - 3080\cdot 10$, m.c.m. $(3080,2376) = 83160$.

2(c) $\mathrm{MCD}(2700,321) = 3 = 321\cdot 143 - 2700\cdot 17$, m.c.m. $(2700,321) = 288900$.

3(a) Segue immediatamente dal fatto che $(A\cup C)\times(B\cup D) = (A\times B)\cup(A\times D)\cup(C\times B)\cup(C\times D)$.

3(b) Si prendano $A=\{a\}, B=\{b\}, C=\{c\}, D=\{d\}$ e si noti, ad esempio, che $(a,d)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$ ma $(a,d)\notin(A\times B)\cup(C\times D)$.

4(a) L'inverso di $5+i$ è $\frac{5-i}{5^2+1^2} = \frac{5}{26}-\frac{1}{26}i$.

4(b) Vediamo come si può procedere trasformando il numero complesso $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-i)$ in forma polare (l'esercizio può essere risolto facilmente anche senza passare in forma polare). Si ha $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$. Pertanto, $z = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i) = \sqrt{2}(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi)$. Applicando la formula di de Moivre per l'elevamento a potenza, si ottiene $z^4 = 4(\cos\frac{44}{6}\pi+i\sin\frac{44}{6}\pi) = 4(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi) = 4(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = -2-2\sqrt{3}i$.

5(a) $1023 = (13043)_5$

5(b) $53 = (110101)_2$

5(c) $777 = (2160)_7$