

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 9 - Andrea Cova (2 dicembre 2003)

1. Se $x \in \mathbf{R}$, denotiamo con $\langle\langle x \rangle\rangle$ la parte intera di x cioè $\langle\langle x \rangle\rangle \in \mathbf{Z}$ è quell'intero tale che $x = \langle\langle x \rangle\rangle + r$ con $0 \leq r < 1$.

Consideriamo l'applicazione: $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$
 $x \rightarrow \langle\langle x \rangle\rangle$

Se ρ_f è la relazione di equivalenza associata a f , cioè $x \rho_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

- a) Determinare la classe di equivalenza di ogni elemento di \mathbf{R} ;
- b) Determinare l'insieme quoziente \mathbf{R}/ρ_f ;
- c) Descrivere esplicitamente la biiezione canonica $\mathbf{R}/\rho_f \leftrightarrow \text{Im}(f)$.

2. Sia S un insieme e (G, \bullet) un gruppo. Nell'insieme $X = G^S$ di tutte le funzioni di dominio S e codominio G si definisca l'operazione: $X \times X \rightarrow X$,
 $(f, g) \rightarrow f * g$, dove $f * g : S \rightarrow G$ è definita da $(f * g)(s) = f(s) \bullet g(s)$. Mostrare che, rispetto a questa operazione, $X = G^S$ è un gruppo.

3. Sia G un gruppo. Mostrare che:

- (a) Se G è abeliano, allora $(ab)^n = a^n b^n$ presi comunque $a, b \in G$ ed $n \geq 1$;
- (b) Se $(ab)^2 = a^2 b^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è abeliano;
- (c) Se ogni elemento di G (diverso dall'elemento neutro) ha ordine 2, allora G è abeliano;
- (d) Se G è finito (non banale) di ordine pari, allora G ha un elemento di ordine 2.

4. Siano $a, b \in \mathbf{R}$ e $a \neq 0$. Sia $t_{a,b} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ l'applicazione definita da $t_{a,b}(x) = ax + b$.

- (a) Verificare che l'insieme $T := \{t_{a,b} : (a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}\}$ è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.
- (c) Mostrare che T non è commutativo.

5. Sia (G, \bullet) un gruppo. Determinare quali tra le seguenti proposizioni sono vere:

- (a) Se H è un sottogruppo di G , allora $H \bullet H = H$.
- (b) Se X è un sottoinsieme non vuoto di G e $X \bullet X = X$, allora X è un sottogruppo di G .
- (d) Se X è un sottoinsieme finito (non vuoto) di G e $X \bullet X = X$, allora X è un sottogruppo di G .

6. Sia G un gruppo ed I un sottoinsieme non vuoto di G . Definiamo: $\langle I \rangle := \{g_1^{z_1} \dots g_r^{z_r} : r \geq 1, g_i \in I, z_i \in \mathbf{Z} \text{ per } 1 \leq i \leq r\}$.

Mostrare che:

- (a) $\langle I \rangle$ è un sottogruppo di G (che si dice il sottogruppo di G generato dal sottoinsieme I);
- (b) Se H è un sottogruppo di G e $I \subset H$, allora $\langle I \rangle \subset H$ (cioè $\langle I \rangle$ è il più piccolo sottogruppo di G contenente I);
- (c) $\langle I \rangle = \bigcap \{H : I \subset H \text{ e } H \text{ è un sottogruppo di } G\}$
- (e) Se $P \subset (\mathbf{R}, +)$ è l'insieme dei numeri interi primi, allora $\langle P \rangle = (\mathbf{Q}^*, \cdot)$.

7. Provare che l'insieme delle matrici del tipo

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbf{R}$, è un gruppo rispetto alla somma di matrici.

8. Stabilire se l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\}$ è un gruppo rispetto al prodotto così definito: $(a, b)(c, d) = (ac, bc + d)$.