Soluzioni IV

13/10/2003

Integrali Impropri

Esercizio 1. (1) Osserviamo che

$$\begin{aligned}-1 < x < 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin x < 0 \Rightarrow 0 < |x| < |x| - \sin x \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{\sqrt{|x|}}{|x| - \sin x} < \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.\end{aligned}$$

Ora se poniamo $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|-\sin x}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ abbiamo che $|f(x)| < g(x)$ per $-1 < x < 0$ e $g(x)$ è integrabile in questo intervallo quindi per il teoema del confronto $f(x)$ è integrabile.

(2) Maggiorariamo la funzione integranda:

$$\left|\frac{\sin x}{x^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{x^2+1}.$$

Quindi abbiamo, per il criterio del confronto, che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\, dx < \infty.$$

(3) Ricordiamo che, integrando per parti, si ottiene $\int \arctan t\, dt = t \arctan t - 1/2 \log(1+t^2) + c$. Quindi

$$\begin{aligned}I(r) &= \int_1^r (\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x})\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{\pi}{2}x + \log x\Big|_1^r \\ &= r\left(\arctan r - \frac{\pi}{2}\right) + \log\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2.\end{aligned}$$

Sfruttando ora il fatto che $\lim_{r\to\infty} r(\arctan r - \frac{\pi}{2}) = -1$ si ha

$$\lim_{r\to\infty} I(r) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 - 1.$$

A questo punto osserviamo che la funzione integranda è positiva quindi

$$I = \int_1^{\infty}\left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) dx = \lim_{r\to\infty} I(r).$$

(4) Osserviamo che $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ quindi

$$\forall M < 0\, \exists \delta : \quad \log x < M \quad \forall x : 0 < x < \delta$$

Prendiamo $M = -2$, per esempio, allora:

$$\int_0^1 x^{\log x}\, dx = \int_0^\delta x^{\log x}\, dx + \int_\delta^1 x^{\log x}\, dx,$$

e per $0 < x < \delta$

$$x^{\log x} = e^{\log(x)\log(x)} > e^{-2\log x} = \frac{1}{x^2},$$

perchè il logaritmo è negativo in $(0, \delta]$. Quindi se poniamo

$$f(x) = x^{\log x} \text{ e } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

si ha che $0 < g(x) < f(x)$ e $g(x)$ non è integrabile in $(0, \delta]$ quindi risulta che neanche f è integrabile.

(5) Sia $a > 1$ cerchiamo b tale che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\log(1+x)}{x^b}}{\frac{1}{x^a}} = 0,$$

quindi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{b-a}} = 0 \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow b > a > 1.$$

Ora se $b > 1$ esiste $c > 0$ e $1 < a < b$ tale che per $x > c$ si ha $\frac{\log(1+x)}{x^b} < \frac{1}{x^a}$. Possiamo scrivere perciò

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^b}\, dx = \int_0^c \frac{\log(1+x)}{x^b}\, dx + \int_c^\infty \frac{\log(1+x)}{x^b}\, dx.$$

L'integrale sulla semiretta del secondo membro converge per quanto visto prima. Per quanto riguarda l'integrale tra 0 e c ricordiamo che se $x > 0$ si ha $0 < \log(1+x) < x$, quindi

$$\int_0^c \frac{\log(1+x)}{x^b}\, dx < \int_0^c \frac{1}{x^{b-1}}\, dx < \infty \Leftrightarrow b < 2.$$

In conclusione se $1 < b < 2$ l' integrale converge, vediamo che succede se b non appartiene a questo intervallo. Osserviamo che se

$$b \leq 1 \Rightarrow x^b \leq x$$

e

$$x \geq e-1 \Rightarrow \log(1+x) \geq 1$$

perciò

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x^b}\,dx > \int_{e-1}^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x^b}\,dx \geq \int_{e-1}^{\infty} \frac{1}{x} = \infty,$$

quindi se $b \leq 1$ l'integrale diverge. Ricordiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ quindi

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad 1-\epsilon < \frac{\log(1+x)}{x} < 1 \text{ se } 0 < x < \delta,$$

quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x^b}\,dx > \int_0^{\delta} \frac{\log(1+x)}{x}\frac{1}{x^{b-1}}\,dx > \int_0^{\delta} \frac{(1-\epsilon)}{x^{b-1}}\,dx.$$

Quindi se $b \geq 2$ l'integrale diverge.