Soluzioni VI

27/10/2003

Serie di Funzioni

Esercizio 1. Pongo per semplicità $u_n(x) = \frac{x^{\alpha n}}{n^x}$. Essendo $\alpha n \in \mathbb{R}$ deve essere $x \geq 0$ altrimenti non sarebbe definito $x^{\alpha n}$. A questo punto possiamo scrivere più precisamente:

$$x^{\alpha n} = \begin{cases} e^{\alpha n \log x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Distinguiamo due casi $\alpha \leq 0$ e $\alpha > 0$.
Per $\alpha \leqslant 0$ la serie converge puntualmente in $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. Infatti in P vale: $\frac{x^{\alpha n}}{n^x} < \frac{1}{n^x}$ e quindi la serie in questione converge per il criterio del confronto se $x > 1$. Ora la funzione $u_n(x)$ è decrescente in x ($x > 0$) e quindi se $x \in [0, 1]$ $u_n(x) \geq u_n(1) = 1/n$ la cui serie diverge. Quindi la serie diverge per $x \in [0, 1]$. La serie converge totalmente negli intervalli del tipo $[r, \infty)$ con $r > 1$ infatti $u_n(x)$ è decrescente in x e quindi $\sum \sup_{[r,\infty)} |u_n(x)| = \sum \frac{r^{\alpha n}}{n^r}$ che converge per $r > 1$. La serie non può convergere totalmente in $(1, \infty)$ infatti se convergesse in esso convergerebbe anche nella sua chiusura, ma per $x = 1$ la serie non converge neanche puntulamente. Anche per quanto riguarda la convergenza uniforme non possiamo estenderci a $(1, \infty)$ infatti le $u_n(x)$ sono continue in $[1, \infty)$, ma per $x = 1$ la serie non converge.
Riassumendo:

$$P_{\alpha \leq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}, \quad U_{\alpha \leqslant 0} = T_{\alpha \leqslant 0} = [r, \infty) \ \forall r > 1,$$

dove P, U, T sono rispettivamente gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale.
Per $\alpha > 0$ invece l'insieme di convergenza puntuale è $P = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}$, infatti in esso $n^x > 1$ e quindi vale la stima $\frac{x^{\alpha n}}{n^x} < x^{\alpha n}$ da cui si può dedurre che la serie converge per confronto con la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha n}$.
Se invece fosse $x \geqslant 1$ possiamo dimostrare che

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ u_n(x) > 1/n$$

e quindi la serie divergerebbe. Infatti

$$\frac{x^{\alpha n}}{n^x} = e^{\alpha n \log x - x \log n} > 1/n = e^{-\log n} \Leftrightarrow x < \frac{\alpha n \log x}{\log n} + 1$$

e questo è vero da un certo n_0 in poi. Abbiamo quindi dimostrato che se $\alpha > 0$ e $x \geqslant 1$ la serie diverge per confronto con la serie armonica. La serie converge totalmente in tutti gli insiemi della forma $[0, r]$ con $r < 1$, infatti $\sum \sup_{[0,r]} |u_n(x)| < \sum r^{\alpha n}$ che converge per $r < 1$. Non possiamo estendere l'insieme di convergenza uniforme e totale per motivi analoghi a quelli del caso $\alpha \leqslant 0$.
Riassumendo:

$$P_{\alpha>0} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}, \quad U_{\alpha>0} = T_{\alpha>0} = [0, r] \quad \forall r < 1.$$

Esercizio 2. Essendo una serie a segni alterni ($n^x > 0$ sempre) possiamo usare il criterio di Leibnitz[1]. Basta dimostrare quindi che $|u_n(x)| = \frac{1}{n^x}$ decresce a 0 e questo è vero solo se $x > 0$. Se abbiamo bisogno però di convergenza assoluta dobbiamo restringerci all'insieme $(1, \infty)$ in quanto abbiamo una serie armonica generalizzata. La convergenza totale si ha in tutti gli insiemi del tipo $[r, \infty)$ con $r > 1$ infatti la funzione $\frac{1}{n^x}$ è decrescente per $x > 1$. Si ha convergenza uniforme negli intervalli del tipo $[\epsilon, \infty)$ con $\epsilon > 0$ infatti: $\sup_{[\epsilon,\infty)} |\sum_{n \geqslant N} (-1)^n \frac{1}{n^x}| \leqslant \sup_{[\epsilon,\infty)} \frac{1}{N^x} = \frac{1}{N^\epsilon} \to_N 0$.

Esercizio 3. Anche in questo esercizio bisogna usare il criterio di Leibnitz, cioè basta dimostrare $u_n(x) = e^{-(\log n)^x}$ decresce (in n) a 0. La funzione $u_n(x)$ è decrescente in n se e solo se $x > 0$ in più

$$e^{-(\log n)^x} \to 0 \Leftrightarrow (\log n)^x \to \infty \Leftrightarrow x > 0.$$

Ora studiamo la convergenza assoluta: devo studiare per quali x la serie $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-(\log n)^x}$ converge. Se $x = 1$

$$e^{-(\log n)^x} = \frac{1}{n}$$

e quindi diverge. Se $0 < x < 1$

$$(\log n)^x < \log n \Rightarrow e^{-(\log n)^x} > e^{-(\log n)} = \frac{1}{n}$$

e quindi diverge. Ora sia $x > 1$ voglio vedere se

$$\exists p > 1 : \quad e^{-(\log n)^x} < \frac{1}{n^p}$$

[1]Se $\sum_n (-1)^n a_n$ dove $a_n \to 0$ e $a_n > 0$ decrescente allora la serie converge).

passando ai logaritmi nell'ultima espressione otteniamo

$$1 < p < (\log n)^{x-1}$$

e questo è vero definitivamente. Quindi non convergendo per $x = 1$ ed essendo la funzione decrescente in x si ha convergenza totale negli insiemi del tipo $[r, \infty]$ con $r > 1$. Si ha convergenza uniforme in $[\epsilon, \infty)$ con $\epsilon > 0$, basta infatti osservare che $\sup_{[\epsilon,\infty)} |\sum_{n \geqslant N} (-1)^n e^{-(\log n)^x}| \leqslant \sup_{[\epsilon,\infty)} e^{-(\log N)^x} = e^{-(\log N)^\epsilon} \to_N 0$.

Esercizio 4. Intanto osserviamo che deve essere $x \geqslant 0$ altrimenti la successione $u_n(x)$ non sarebbe definita. Poniamo

$$u_n(x) = log\left[1 + \arctan\left(\frac{x}{n}\right)^\alpha\right]$$

e osserviamo che $u_n(x) > 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0.$$

Ora

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$$

quindi fissato $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$t(1-\epsilon) < \arctan t < t(1+\epsilon)$$

per ogni $|t| < \delta$ e preso $\epsilon = 1/2$

$$\frac{t}{2} < \arctan t < \frac{3t}{2}$$

e dal limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

possimao affermare che per $|t| < \delta_1$

$$\frac{t}{2} < \log(1+t) < \frac{3t}{2}.$$

Da cui per $|t| < \min(\delta, \delta_1) =: \delta_2$

$$\frac{t}{4} < \log(1 + \arctan t) < \frac{9t}{4}$$

Quindi per ogni x esiste un N t.c.

$$\left(\frac{x}{n}\right)^\alpha < \delta_2$$

per ogni $n > N$ e perciò

$$\frac{1}{4}\frac{x^\alpha}{n^\alpha} < u_n(x) < \frac{9}{4}\frac{x^\alpha}{n^\alpha}$$

Quindi la serie converge puntualmente se e solo se $\alpha > 1$ per ogni $x > 0$. Per quanto riguarda la covergenza totale

$$\sup_{x>0} u_n(x) = \infty$$

e quindi la serie non coverge totalmente per $x > 0$. Proviamo a restringerci ai compatti del tipo $[0, r]$ con $r > 0$ allora

$$\sup_{[0,r]} u_n(x) = u_n(r)$$

che converge. Studiamo la convergenza uniforme:

$$\sup_{x>0} \Big| \sum_{n=N}^{\infty} u_n(x) \Big| > \frac{1}{4} \sup_{x>0} \Big| x^\alpha \Big| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty.$$

Quindi riassumendo la serie converge solo se $\alpha > 1$ e

$$P = [0, \infty), \quad U = T = [0, r].$$

Esercizio 5. Considero

$$e^{-\alpha n}|x|^n = e^{n(\log|x| - \alpha)}.$$

Si deduce quindi che la serie converge se

$$\log|x| - \alpha < 0 \Leftrightarrow |x| < e^\alpha \Leftrightarrow -e^\alpha < x < e^\alpha.$$

Studiamo la convergenza totale: $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_E e^{-\alpha n}|x|^n$, questa serie converge se $E = [-r, r]$ con $r < e^\alpha$. In E la serie convege anche uniformente. Non si possono estendere ulteriormente gli insiemi di convergenza uniforme e totale perchè per $|x| = e^\alpha$ la serie non converge puntualmente.