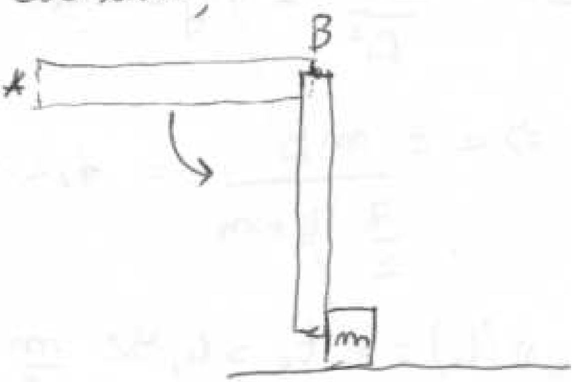
1. Un'asta AB, di lunghezza $l = 1,2$ m e massa $M = 0,5$ kg, è incernierata nel suo estremo B ad un perno fisso orizzontale e può oscillare senza attrito in un piano verticale - Nell'istante $t=0$ l'asta, che è in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera di ruotare. Raggiunta la posizione verticale urta un piccolo oggetto, inizialmente fermo, di massa $m = 0,25$ kg, che parte con velocità v_0 orizzontale, mentre l'asta si ferma. Calcolare:

1) la velocità angolare dell'asta subito prima dell'urto;
2) la velocità v_0;
3) l'energia cinetica dissipata nell'urto;
4) l'impulso durante l'urto.



Sol.: 1) conservazione dell'E:

$$Mgl = Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 4,95 \ \frac{rad}{s}$$

2) $$\vec{M}^{(E)} \to \vec{0} \Rightarrow L_{in} = L_{fin} \Rightarrow I\omega = m v_0 l \Rightarrow v_0 = \frac{1}{3}\frac{M}{m} l\omega = 3,96$$

3) $$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} I\omega^2 = -0,98 \ J$$

4) $$\vec{J} = \Delta p = m v_0 - MV = m v_0 - M\omega\frac{l}{2} = -0,50 \ Ns$$

2. La particella di massa m in fig. scivola giù per la superficie priva di attrito per un'altezza h e va a urtare l'estremità dell'asta verticale omogenea (M, d) alla quale si attacca. L'asta gira intorno a O di un angolo ϑ e si arresta. Trovare ϑ in funzione degli altri parametri.

Sol.: $\quad mgh = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$

$I_{asta} = \frac{1}{3} M d^2 , \quad I_{tot} = I_{asta} + m d^2$

$\vec{M}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cost. \Rightarrow \quad m v d = I_{tot} \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{m v d}{I_{tot}}$

conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} I_{tot} \omega^2 + Mg\frac{d}{2} = Mg\left(d - \frac{d}{2}\cos\vartheta\right) + mg(d - d\cos\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} M d^2 + m d^2\right) \cdot \frac{m^2 v^2 d^2}{\left(\frac{1}{3} M d^2 + m d^2\right)^2} + Mg\frac{d}{2} = Mgd - Mg\frac{d}{2}\cos\vartheta + mgd +$$

$$- mgd\cos\vartheta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\vartheta = 1 - \frac{6 m^2 h}{d(2m+M)(M+3m)}$$ (avendo sostituito $v^2 = 2gh$)

3. Si abbiano due sferette A e B aventi la stessa massa m. Ad A è fissata una molla di massa trascurabile e di costante elastica k. Inizialmente A è ferma e B si muove in direzione di A con velocità $\vec{v}$ diretta secondo l'asse della molla. Quando B entra in contatto con l'estremo libero della molla vi rimane attaccata e, quando la molla si è accorciata di una lunghezza d, un opportuno congegno meccanico blocca la molla. Si calcoli la velocità iniziale v di B e la velocità finale v_c di tutto il sistema. Dati: $m = 0{,}5$ kg; $k = 100 \frac{N}{s}$ $d = 5$ cm.

Sol.: $\quad m_A v_B = m_B v_B' + m_A v_A' = (m_A + m_B) v_c \Rightarrow v_c = \frac{v}{2}$

(conservazione della quantità di moto)

conservazione dell'energia: $\quad \frac{1}{2} m_B v^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_c^2 + \frac{1}{2} k d^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \frac{v^2}{4} + \frac{1}{2} k d^2 \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2kd^2}{m} \Rightarrow v = 1 \, m/s$

$v_c = \frac{v}{2} = 0{,}5 \, \frac{m}{s}$.