# Am2 – Soluzioni Tutorato IV

Continuità funzioni in più variabili

Venerdì 11 Novembre 2005

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

**Esercizio 1**

(a) La funzione è continua nell' origine. Infatti dalla disuguaglianza $x^4 = x^2 \cdot x^2 \le x^2\left(x^2 + y^2\right)$ si ottiene:

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^4}{x^2+y^2} \le \frac{x^2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = x^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

(b) La funzione è continua nell' origine. Infatti:

$$\left|\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

dove l' ultimo passaggio segua dal punto (a)

(c) La funzione è continua nell' origine. Infatti:

$$\left|y^2 \cos\frac{1}{xy}\right| = y^2\left|\cos\frac{1}{xy}\right| \le y^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

(d) La funzione è discontinua nell' origine in quanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} = 2$.

Infatti $\left|\frac{3x^3+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - 2\right| = \left|\frac{3x^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{3|x|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 3|x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Tuttavia è possibile rimuovere la discontinuità ponendo $f(0,0) = 2$.

(e) La funzione è continua nell' origine. Infatti dalla disuguaglianza $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$ si ottiene:

$$\left|\frac{4x^5y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right| = \left|x\frac{4\left(x^2y\right)^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right| \le |x|\left|\frac{4\left(\frac{x^4+y^2}{2}\right)^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right| = |x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

**Esercizio 2** Notiamo subito che è banale verificare la continuità sulle rette. Infatti:

$$f(x,mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Tuttavia la funzione non è continua. Infatti basta ad esempio avvicinarsi all'origine lungo ad una parabola:

$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}$$

Questo fatto può essere interpretato facilmente: la continuità lungo le rette è una condizione NECESSARIA, ma non SUFFICIENTE per la continuità in un punto di una funzione $f : \Re^2 \to \Re$.

**Esercizio 3** (i) Utilizziamo le coordinate polari:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^{\alpha+\beta}|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta}{\rho^2}$$

da cui è evidente che la funzione è discontinua se $\alpha + \beta \le 2$. D' altra parte se $\alpha + \beta > 2$ dalla stessa relazione si ottiene che la funzione è continua nell' origine.

(ii) Consideriamo la funzione lungo le rette passanti nell'origine:

$$f(x,mx) = \frac{|x|^{\alpha+\beta}|m|^\beta}{(x)^{2\gamma}(3+5m^2)^\gamma}$$ che è discontinua per $\alpha + \beta \le 2\gamma$.

Supponiamo, invece, $\alpha + \beta > 2\gamma$. Dalle disuguaglianze

$$|x|^\alpha = \left(\sqrt{x^2}\right)^\alpha \le \left(\sqrt{3x^2 + 5y^2}\right)^\alpha = \left(3x^2 + 5y^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$
$$|y|^\beta = \left(\sqrt{y^2}\right)^\beta \le \left(\sqrt{3x^2 + 5y^2}\right)^\beta = \left(3x^2 + 5y^2\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

si ottiene

$$0 \le \frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{(3x^2 + 5y^2)^\gamma} \le \frac{(3x^2 + 5y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{(3x^2 + 5y^2)^\gamma} = \left(3x^2 + 5y^2\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$ in quanto $\alpha + \beta > 2\gamma$.

(iii) Consideriamo la funzione lungo le parabole $y = mx^2$:

$$f(x,mx^2) = \frac{|x|^{\alpha+2\beta}|m|^\beta}{(x)^{4\gamma}(1+m^2)^\gamma}$$ che è discontinua per $\alpha + 2\beta \le 4\gamma$.

Supponiamo, invece, $\alpha + 2\beta > 4\gamma$. Dalle disuguaglianze

$$|x|^{\alpha} = \left(x^4\right)^{\frac{\alpha}{4}} \le \left(x^4 + y^2\right)^{\frac{\alpha}{4}}$$
$$|y|^{\beta} = \left(y^2\right)^{\frac{\beta}{2}} \le \left(x^4 + y^2\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

si ottiene

$$0 \le \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{\left(x^4 + y^2\right)^{\gamma}} \le \frac{\left(x^4 + y^2\right)^{\frac{\alpha+2\beta}{4}}}{\left(x^4 + y^2\right)^{\gamma}} = \left(x^4 + y^2\right)^{\frac{\alpha+2\beta}{4}-\gamma} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 \text{ in quanto } \alpha + 2\beta > 4\gamma .$$

**Esercizio 4** La funzione è continua in $\Re \setminus \{(0,0)\}$ $\forall \alpha \in \Re$. È continua nell'origine se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\log(1+y)}{\left(x^2 + \arctan^2 y\right)^{\alpha}} = 0$$

Dagli sviluppi di Taylor del logaritmo e dell' arcotangente intorno all'origine si ha

$$\log(1+y) = y + o(y)$$

$$\arctan(y) = y + o(y)$$

e quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + xo(y)}{\left(x^2 + y^2 + o(y^2)\right)^{\alpha}}$$

Passando al valore assoluto e alle coordinate polari si ottiene infine

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{\rho^2|\cos\theta\sin\theta| + \rho|\cos\theta| o(\rho)}{(\rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + o(\rho^2))} \le \lim_{\rho\to 0} \rho^{2-2\alpha} \frac{\left(1 + \frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right)}{\left(1 + \frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right)^{\alpha}} = 0$$

Dove l'ultima uguaglianza è vera se e solo se $2 - 2\alpha > 0$ cioè $\alpha < 1$. D' altra parte se $a \ge 1$ considerando la funzione sulla bisettrice del primo e terzo quadrante si ottiene

$$f(x,x) = \frac{x\log(1+x)}{(x^2 + \arctan^2 x)^{\alpha}} = \frac{x^2\left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^{2\alpha}\left(1 + \frac{arcant^2 x}{x^2}\right)^{\alpha}} \xrightarrow{x\to 0} \infty$$