

Am2 – Tutorato IV

Continuità funzioni in più variabili

Venerdì 11 Novembre 2005
Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1 Discutere la continuità nell'origine delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} y^2 \cos \frac{1}{xy} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3 + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^5 y^2}{(x^4 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 2 Mostrare che la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua su tutte le rette passanti per l'origine ma è discontinua in 0. Come è possibile spiegarlo?

Esercizio 3 Si dica per quali $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ la seguenti funzioni sono continue:

$$(i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(ii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(3x^2 + 5y^2)^\gamma} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(iii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^4 + y^2)^\gamma} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 4 (*Difficile*) Per quali $\alpha \in \mathfrak{R}$ la seguente funzione è continua:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \log(1+y)}{(x^2 + \arctan^2 y)^\alpha} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$