Am2 – Tutorato V

Derivabilità, differenziabilità, massimi e minimi relativi

Giovedì 24 Novembre 2005

Filippo Cavallari, Fabio Pusateri

Esercizio 1 In quali punti $(x, y) \in \Re^2$ esistono le derivate parziali di $f(x, y) = |xy|$?

Esercizio 2 Dopo aver verificato che la seguente funzione ammette limite per $(x, y) \to (0,0)$ estenderla per continuità e verificare che nell'origine e derivabile lungo ogni direzione ma tuttavia non è ivi differenziabile

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Esercizio 3 Data la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \cos\frac{1}{y} & se \quad y \neq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Verificare che tale funzione è continua e differenziabile nell' origine ma non ammette derivate parziali continue. Questo contraddice il teorema del differenziale?

Esercizio 4 Data la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & se \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Verificare che tale funzione è continua, derivabile e differenziabile nell' origine ma ammette derivate seconde miste distinte. Questo contraddice il teorema di Schwartz?

Esercizio 5 Discutere continuità e differenziabilità della seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & se \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 1 & altrimenti \end{cases}$$

Esercizio 6 Dire per quali α e β le seguenti funzioni sono differenziabili nell' origine

$$f(x, y) = |xy|^\alpha$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} & se \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Esercizio 7 Data la seguente funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^3}{x^8+y^4} & se \qquad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & altrimenti\end{cases}$$

Discuterne continuità, derivabilità e differenziabilità. Stabilire inoltre se $f \in C^1(\Re^2)$. (*Suggerimento*: può essere utile utilizzare la disuguaglianza di Hölder)

Esercizio 8 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni

(a) $f(x,y)=2x^2y+2xy^2-x^2y^2-4xy$ (b) $f(x,y)=(x-y)e^{-(x^2+y^2)}$ (c) $f(x,y)=\sin(xy)$