AM3 -Soluzioni esercizi proposti
A.A. 2005-2006

Laura Di Gregorio

31 marzo 2006

Soluzione 1 .
Essendo

$$F_y(x,y) = x^2 + e^{x-y} > 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

vale il teorema delle funzioni implicite nella versione *globale* per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Infatti vale che

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} F(x,y) = \pm\infty$$

quindi per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste un $\bar{y}$ che verifica l'equazione $F(x,y) = 0$; inoltre la monotonia della F rispetto ad y mi dice che tale $\bar{y}$ è unico.
Essendo $F \in C^\infty$ anche $g \in C^\infty$ per il teorema sulla regolarità.
Calcoliamo la derivata prima di g:

$$F_x(x, g(x)) = 2xg(x) + x^2 g'(x) + e^{x+g(x)}(1 + g'(x)) = 0.$$

Ricavo $g'(x)$ e la calcolo in $x = 2$

$$g'(x)\big|_{x=2} = \frac{-2xg(x) - e^{x+g(x)}}{x^2 + e^{x+g(x)}} = \left.\frac{-2xg(x) + x^2 g(x)}{x^2 - x^2 g(x)}\right|_{x=2} = 0.$$

quindi $x = 2$ è un punto stazionario per $g(x)$. Calcoliamo $g''(x)$:

$$\begin{aligned} g''(x)\big|_{x=2} &= \frac{[g'(x)(x-2) + g(x)][x(1-g(x))]}{x^2(1-g(x))^2} + \\ &\quad \left. + \frac{[1 - g(x) - xg'(x)](2-x)g(x)}{x^2(1-g(x))^2}\right|_{x=2} \\ &= \frac{g(2)}{2(1-g(2))} < 0 \end{aligned}$$

perché g può assumere solo valori negativi. Segue che $x = 2$ è punto di massimo relativo per la $g(x)$.

Soluzione 2 .
Si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Per trovare i punti critici di f risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 2x(y-1)^3(z+2)^2 = 0 \\ f_y(x,y,z) = 3x^2(y-1)^2(z+2)^2 = 0 \\ f_z(x,y,z) = 2x^2(y-1)^3(z+2) = 0\,. \end{cases}$$

Le soluzioni sono i punti $(0,b,c)$, $(a,1,c)$, $(a,b,-2)$ con a,b,c, reali. In tali punti $f=0$. Basta ora esaminare il segno di f in un intorno di tali punti. In punti $(0,b,c)$ e $(a,b,-2)$ sono punti di massimo se $b<1$ poicé f è negativa mentre sono di minimo se $b>1$ in quanto f è positiva.

Soluzione 3 .
Si ha $f \in C^\infty\big(\mathbb{R}^3 - \{(x,y,z)\ :\ x \neq 0,\ y \neq 0\, z \neq 0\}\big)$. Per trovare i punti critici di f risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} + yz = 0 \\ f_y(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} + xz = 0 \\ f_z(x,y,z) = -\frac{1}{z^2} + xy = 0\,. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e la terza per z e sottraendo a due a due si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - y = 0 \\ -\frac{1}{z^2} + xy = 0\,. \end{cases}$$

Si trovano i punti $P_1 = (1,1,1)$ e $P_2 = (-1,-1,-1)$. Per la simmetria della funzione

$$f(x,y,z) = -f(-x,-y,-z)$$

basta studiare la natura del punto $(1,1,1)$. Scriviamo la matrice hessiana nel punto

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Secondo la regola dei minori, abbiamo che tutti i minori principali hanno determinante strettamente positivo quindi il differenziale secondo di f è una forma quadratica definita positiva e perciò il punto $(1,1,1)$ è di minimo locale per f. Per la simmetria della f si ha che $(-1,-1,-1)$ è punto di massimo locale per f.

Soluzione 4 .

Sia $f(x,y,u,z) = x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2 e^z$. Si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$, $f(0,0,0,1) = 0$, $f_z(x,y,u,z) = -1 + y^2 e^z$, $f_z(0,0,0,1) = -1 \neq 0$. Essendo verificate le ipotesi del teorema locale esiste un'unica funzione $z = z(x,y,u)$ in un intorno U di $(0,0,0)$ tale che $z(0,0,0) = 1$ e

$$x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z(x,y,u) + y^2 e^{z(x,y,u)} = 0\,, \qquad \forall\,(x,y,u) \in U\,. \quad (1)$$

Risulta $z \in C^\infty(U)$. Calcoliamo le derivate prime e seconde di z per verificare che $(0,0,0)$ è punto critico e determinarne la natura. Derivando (1) rispetto alle variabili x, y, u si ha

$$\begin{aligned}
2x + u^2 + ue^{xu} - z_x + y^2 e^z z_x &= 0\\
2y - z_y + 2ye^z + y^2 e^z z_y &= 0\\
2xu + xe^{xu} - z_u + y^2 e^z z_u &= 0
\end{aligned}$$

da cui sostituendo $x = y = u = 0$ si ricava

$$z_x(0,0,0) = z_y(0,0,0) = z_u(0,0,0) = 0\,.$$

Dunque l'origine è un punto critico per z. Derivando ulteriormente si ha

$$\begin{aligned}
2 + u^2 e^{xu} - z_{xx} + y^2 e^z z_x^2 + y^2 e^z z_{xx} &= 0\\
-z_{xy} + 2ye^z z_x + y^2 e^z z_x z_y + y^2 e^z z_{xy} &= 0\\
2u + e^{xu} + xue^{xu} - z_{xu} + y^2 e^z z_x z_u + y^2 e^z z_{xu} &= 0\\
2 - z_{yy} + 2e^z z_x + 2ye^z z_y + 2ye^z z_y + y^2 e^z z_y^2 + y^2 e^z z_{yy} &= 0\\
-z_{yu} + 2ye^z z_u + y^2 e^z z_y z_y + y^2 e^z z_{yu} &= 0\\
2x + x^2 e^{xu} - z_{uu} + y^2 e^z z_u^2 + y^2 e^z z_{uu} &= 0
\end{aligned}$$

e sostituendo $x = y = u = 0$, $z = 1$, $z_x = z_y = z_u = 0$ si ricava

$$z_{xx}(0,0,0) = 2\,, \quad z_{xy}(0,0,0) = 0\,, \quad z_{xu}(0,0,0) = 1\,,$$

$$z_{yy}(0,0,0) = 2 + 2e\,, \quad z_{yu}(0,0,0) = 0\,, \quad z_{uu}(0,0,0) = 0\,.$$

Dunque

$$d^2 z(0,0,0) = 2x^2 + (2+2e)y^2 + 2xu$$

è una forma quadratica indefinita quindi $(0,0,0)$ è un punto di sella.

Soluzione 5 .

(a) Si ha $F(0,0)=0$. Essendo g di classe $C^2(\mathbb{R})$ anche $F\in C^2(\mathbb{R}^2)$. Si ha $F_y(x,y)=3y^2+1$ e $F_y(0,0)=1\neq 0$, sono verificate le ipotesi del teorema locale e quindi esiste un' unica funzione $y=f(x)$ in un intorno di 0 fale che $f(0)=0$.
(b) Essendo $F_y(x,y)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e

$$\lim_{y\longrightarrow\pm\infty} F(x,y)=\pm\infty$$

sono verificate le ipotesi del teorema globale: la funzione $f(x)$ è definita e di classe C^2 su $\mathbb{R}$. Derivando rispetto ad x l'identità su $\mathbb{R}$

$$f^3(x)+f(x)+\lambda g(x)=0$$

si ha

$$3f^2(x)f'(x)+f'(x)+\lambda g'(x)=0$$

da cui

$$f'(x)=-\frac{\lambda g'(x)}{3f^2(x)+1}$$

da cui si ricava che gli zeri fi f' coincidono con quelli di g'.

Soluzione 6 .
Vale che $f(0,0,0)=0$. Calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}+\cos(x+y^2+z)-1\Big|_{(0,0,0)}=0$$

e analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}+2y\cos(x+y^2+z)\Big|_{(0,0,0)}=0.$$

Invece

$$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)}=+\cos(x+y^2+z)+2z\Big|_{(0,0,0)}=1.$$

Quindi possiamo esplicitare z in funzione di x e y, cioè esiste

$$g:\,A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

di classe C^∞ tale che $z=g(x,y)$ e $f(x,y,z(x,y))=0$ in un intorno di $(0,0,0)$.

Soluzione 7 .

Vale che $F(0) = 0$. F è di classe C^∞ e inoltre

$$\nabla_{z,v} F = \begin{pmatrix} y + 3 - \dfrac{1}{[\cos(z+v)]^2} & -\dfrac{1}{[\cos(z+v)]^2} \\ \\ \cos(z+v) & \cos(z+v) - x \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\det(\nabla_{z,v} F)\big|_{(0,0)} = 3 \neq 0.$$

Sono verificate le ipotesi del TFI, quindi esiste un'unica funzione $(z(x,y), v(x,y))$ definita in un intorno di $(0,0)$ e qui di classe C^∞, tale che

$$(z(0,0), v(0,0)) = 0.$$