Appello A di AM3 - 19/6/2006

1) Sia

$$f(x,y,z) = \begin{cases} e^y \sin x - x(z+1)^2 + y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Allora:
a) discutere la continuitá di $f(x,y,z)$;
b) calcolare le derivate parziali di $f(x,y,z)$ in $(0,0,0)$;
c) discutere la differenziabilitá di $f(x,y,z)$ in $(0,0,0)$;
d) provare o confutare l'affermazione $f \in C^1(\{0\})$.

2) Sia $F(x,y,z) = (1-x^2)^2 e^z - \cos z e^y + \cos x \ln(1+y)$. Allora:
(a) rappresentare come grafico di un'opportuna funzione g l'insieme $\{F = 0\}$ localmente in $p_0 = (0,0,0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di p_0 per cui tale rappresentazione valga.
(b) trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g rispetto a zero.

3) Sia

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2+z^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x+y+z^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Sia $D = D_+ \cup D_-$, ove $D_\pm = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ \pm x \geq 0\}$. Allora:
a) calcolare il massimo/minimo assoluto di $x+y+z^2$ in D_+;
b) calcolare il massimo/minimo assoluto di $x^2+y^2+z^2$ in D_-;
c) dai due punti precedenti, dedurre il valore dell'estremo superiore/inferiore di f in D. Stabilire inoltre se tale valore rappresenta il massimo/minimo assoluto di f in D determinando i punti ove venisse eventualmente assunto.

4) Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 20 \sin x \cos x \\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1. \end{cases}$$

5) Siano $\omega_1 = ydx + xdy$, $\omega_2 = ydx + xdy + (y+z)dz$ due 1-forme definite rispettivamente in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Sia $S = \{(x,y,z) : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$ una porzione di paraboloide. Allora:

a) determinare se ω_1, ω_2 sono forme esatte rispettivamente in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, calcolandone eventualmente un potenziale associato;
b) calcolare $\int_{\partial^+ S} \omega_2$;
c) verificare direttamente il Teorema di Stokes per il campo vettoriale $F(x, y, z) = (y, x, y + z)$ sulla superficie S.

6) Calcolare $\int_\Sigma y^2 d\sigma$, ove Σ è il grafico della funzione $z = \frac{x^2}{2} + y^2$ sull'ellisse $x^2 + 4y^2 \leq 4$.

N.B. Coloro che intendono recuperare il primo/secondo esonero dovranno svolgere i primi/secondi tre esercizi nel tempo massimo di un'ora e mezza. Tutti gli altri avranno invece a disposizione tre ore per svolgere tutto il compito.