Appello X di AM3 - 4/9/2006 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1

a) Si ha che:

$$|f(x,y,z)| \le |xz| \to 0 \quad \text{per } (x,y,z) \to (0,0,0),$$

e quindi f risulta essere continua anche nell'origine.

b) Poiché

$$\frac{f(t,0,0)-f(0,0,0)}{t} = \frac{f(0,t,0)-f(0,0,0)}{t} = \frac{f(0,0,t)-f(0,0,0)}{t} = 0,$$

dalla definizione di derivata parziale otteniamo: $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$.

c) Abbiamo la seguente stima:

$$\left|\frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-\nabla f(0,0,0)\cdot(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \le \frac{|xz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le |z| \to 0 \quad \text{per } (x,y,z) \to (0,0,0),$$

e quindi f risulta essere differenziabile nell'origine.

d) La derivata parziale di f in y vale (fuori dall'origine):

$$\partial_y f(x,y,z) = \frac{2xyz}{x^4+y^2+z^4} - \frac{2xy^3z}{(x^4+y^2+z^4)^2}.$$

Poiché

$$\partial_y f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) = \frac{4}{9}$$

e $\partial_y f(0,0,0) = 0$, risulta esere $f \notin C^1(\{0\})$.

Esercizio 2

a) Abbiamo che $F(0,0,0) = 0$ e

$$\partial_z F(0,0,0) = \cos y \cos z + 2z \sin x \,|_{x=y=z=0} = 1 \neq 0.$$

Dal Teorema della Funzione Implicita abbiamo che esistono $\rho, r > 0$ piccoli ed una mappa $g : B_r(0,0) \to (-\rho,\rho)$ tali che $g(0,0) = 0$ e vale la rappresentazione:

$$\{(x,y,z) \in B_r(0,0) \times (-\rho,\rho) :\ F(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,g(x,y)) :\ (x,y) \in B_r(0,0)\}.$$

Poiché $T = 1$, dobbiamo scegliere $r, \rho > 0$ piccoli tali da soddisfare:

$$\sup_{B_r(0,0)} x^2 e^y \le \frac{\rho}{2}, \qquad \sup_{B_r(0,0)\times(-\rho,\rho)} \left|1 - \cos y cos z - 2z \sin x\right| \le \frac{1}{2}.$$

Per la prima stima, abbiamo che $x^2 e^y \le 3x^2 \le 3r$ e basterá prendere $r \le \frac{\rho}{6}$. Per la seconda stima, da stime elementari sulle funzioni trigonometriche otteniamo che:

$$\left|1 - \cos y cos z - 2z \sin x\right| \le |1-\cos z| + |\cos z(1-\cos y)| + 2|z| \le |z| + |y| + 2|z| \le 4\rho.$$

Basterá quindi prendere $\rho = \frac{1}{8}$ e $r = \frac{1}{48}$.

b) Poiché $x^2 e^y + \cos y \sin g(x,y) + g^2(x,y) \sin x \equiv 0$ in $B_r(0,0)$, possiamo derivare questa espressione in x e y per ottenere rispettivamente:

$$2xe^y + \cos y \cos g(x,y)\partial_x g(x,y) + g^2(x,y)\cos x + 2g(x,y)\partial_x g(x,y)\sin x \equiv 0,$$
$$x^2 e^y + \cos y \cos g(x,y)\partial_y g(x,y) - \sin y \sin g(x,y) + 2g(x,y)\partial_y g(x,y)\sin x \equiv 0$$

per $(x,y)\in B_r(0,0)$. Calcolando tali espressioni per $(x,y)=(0,0)$ otteniamo

$$\partial_x g(0,0)=\partial_y g(0,0)=0.$$

Derivando tali relazione ulteriormente in x e y e calcolandone poi il valore in $(0,0)$, otteniamo

$$\partial_{xx}g(0,0)=-2\ ,\quad \partial_{xy}g(0,0)=0\ ,\quad \partial_{yy}g(0,0)=0,$$

e quindi lo sviluppo cercato sará:

$$g(x,y)=-x^2+o(x^2+y^2).$$

Esercizio 3
a) Calcoliamo il gradiente di $f(x,y,z)$:

$$\nabla f(x,y,z)=\left(2x+1+x^2+y+z^2,-x^2-y-z^2,2z-1-x^2-y-z^2\right)e^{x-y-z}.$$

Tale vettore si annulla solo quando $x=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}$ e $y=-x^2-z^2=-\frac{1}{2}$. Il punto $P=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in D$ è l'unico punto critico libero di $f(x,y,z)$ e si ha: $f(P)=e^{-\frac{1}{2}}$. Studiamo ora i punti critici vincolati di $f(x,y,z)$ su ∂D.

Consideriamo prima di tutto il piano $x=\pm1$: dobbiamo studiare la funzione $g_1(y,z)=f(\pm1,y,z)=(2+y+z^2)e^{\pm1-y-z}$ sul quadrato $\{|y|\leq 1,\ |z|\leq 1\}$. Abbiamo che

$$\nabla g_1(y,z)=e^{\pm1-y-z}\left(-1-y-z^2,2z-2-y-z^2\right)$$

non si annulla mai nell'interno del quadrato (si annullerebbe solo nel punto $y=-\frac{5}{4}$, $z=\frac{1}{2}$). Consideriamo ora i punti critici vincolati di $g_1(y,z)$ sui lati di tale quadrato. Su $y=\pm1$, l'equazione $\partial_z g_1(y,z)=0$, ossia $z^2-2z+2\pm1=0$, non ammette soluzioni in $(-1,1)$ e non produce punti critici vincolati. Similmente, su $z=\pm1$ l'equazione $\partial_y g_1(y,z)=0$, ossia $y=-2\notin(-1,1)$, non produce punti critici vincolati accettabili. Restano da considerare i vertici del quadrato (che rappresentano anche tutti i vertici del cubo): $P_1^{\pm}=(\pm1,1,1)$, $P_2^{\pm}=(\pm1,-1,1)$, $P_3^{\pm}=(\pm1,1,-1)$ e $P_4^{\pm}=(\pm1,-1,-1)$, ove la funzione f vale:

$$f(P_1^{\pm})=4e^{\pm1-2}\ ,\ f(P_2^{\pm})=2e^{\pm1}\ ,\ f(P_3^{\pm})=4e^{\pm1}\ ,\ f(P_4^{\pm})=2e^{\pm1+2}.$$

Consideriamo ora il piano $y=\pm1$: dobbiamo studiare la funzione $g_2(x,z)=f(x,\pm1,z)=(1+x^2\pm1+z^2)e^{x\mp1-z}$ sul quadrato $\{|x|\leq 1,\ |z|\leq 1\}$. Abbiamo che

$$\nabla g_2(y,z)=e^{x\mp1-z}\left(2x+1+x^2\pm1+z^2,2z-1-x^2\mp1-z^2\right)$$

si annulla all'interno del quadrato solo per $y=-1$ e $x=-z=0$. Nel punto $Q=(0,-1,0)$ la funzione f vale: $f(Q)=0$. Consideriamo ora i punti critici vincolati di $g_2(x,z)$ sui lati del quadrato. Per $x=\pm1$ l'equazione $\partial_z g_2(x,z)=0$, ossia $z^2-2z+2\pm1=0$, e per $z=\pm1$ l'equazione $\partial_x g_2(x,z)=0$, ossia $x^2+2x+2\pm1=0$, come prima non ammettono soluzioni in $(-1,1)$. Restano da studiare i vertici di tale quadrato, che peró sono giá stati considerati in precedenza.

Consideriamo infine il piano $z=\pm1$: resta da studiare la funzione $g_3(x,y)=f(x,y,\pm1)=(2+x^2+y)e^{x-y\mp1}$ sul quadrato $\{|x|\leq 1,\ |y|\leq 1\}$. Poiché $g_3(x,y)=e^{\mp2}g_1(y,-x)$, la funzione $g_3(x,y)$ non ammette punti critici liberi all'interno del quadrato e neanche punti critici vincolati sui lati di tale quadrato.

Otteniamo infine:

$$f(Q)=\min_D f=0\ ,\quad f(P_4^{+})=\max_D f=2e^3.$$

Esercizio 4
Il polinomio caratteristico $\lambda^2-4\lambda+3$ ha due radici reali 1, 3 e lo spazio delle soluzioni omogenee sará quindi generato da e^x, e^{3x}.
Per il metodo di variazione delle costanti, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{3x}$. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{c_1}e^x + \dot{c_2}e^{3x} = 0 \\ \dot{c_1}e^x + 3\dot{c_2}e^{3x} = xe^{-x}. \end{cases}$$

Quindi

$$c_1(x) = -\int \frac{x}{2}e^{-2x}dx = \frac{x}{4}e^{-2x} - \int \frac{e^{-2x}}{4}dx = \frac{x}{4}e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{8}$$

e

$$c_2(x) = \int \frac{x}{2}e^{-4x}dx = -\frac{x}{8}e^{-4x} + \int \frac{e^{-4x}}{8}dx = -\frac{x}{8}e^{-4x} - \frac{e^{-4x}}{32}.$$

La soluzione particolare risulta essere: $\bar{y}(x) = \frac{x}{8}e^{-x} + \frac{3}{32}e^{-x}$, e la soluzione generale sará:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{x}{8}e^{-x} + \frac{3}{32}e^{-x}.$$

Imponendo le condizioni iniziali, si deve avere $c_1 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{32}$, e quindi la soluzione cercata sará:

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{32}e^{3x} + \frac{x}{8}e^{-x} + \frac{3}{32}e^{-x}.$$

Esercizio 5
a) E' facile verificare che la forma ω_1 è chiusa (e dunque esatta), e un suo potenziale è dato dalla funzione

$$f(x,y,z) = \frac{\cos x}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^4}\sin y.$$

b) Poiché la forma $d\big(f^2(x,y,0)\big)$ è esatta, ha integrale nullo sulla curva chiusa ∂^+S e quindi

$$\int_{\partial^+S}\omega_2 = \int_{\partial^+S} ydx.$$

Essendo ∂^+S il cerchio unitario C nel piano $\{z=0\}$, si calcola facilmente:

$$\int_{\partial^+S}\omega_2 = -\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = -\pi.$$

c) Abbiamo rot $F = (2yz-x, 0, z-1)$. La mappa $\varphi : (x,y) \in D \to (x, y, 1-x^2-y^2) \in S$ parametrizza la superficie S, ove D è il disco unitario 2-dimensionale. Poiché $\varphi_x = (1,0,-2x)$, $\varphi_y = (0,1,-2y)$ otteniamo che $\varphi_x \wedge \varphi_y = (2x, 2y, 1)$. Essendo $n = \frac{\varphi_x\wedge\varphi_y}{|\varphi_x\wedge\varphi_y|}$ e $d\sigma = |\varphi_x\wedge\varphi_y|$, otteniamo che in coordinate polari:

$$\begin{aligned}\int_S \text{rot } F\cdot n d\sigma &= \int_D \text{rot } F\cdot(2x,2y,1)dxdy = \int_0^1\rho^3d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\big(4(1-\rho^2)\cos\theta\sin\theta - 2\cos^2\theta - 1\big) \\ &= -4\pi\int_0^1\rho^3d\rho = -\pi.\end{aligned}$$

Poiché $\int_{\partial^+S} ydx + xzdy + y^2zdz = \int_{\partial^+S} ydx = -\pi$, la validitá del teorema di Stokes è provata.

Esercizio 6
Sia $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$. Per il Teorema di Fubini, si ha che

$$\int_E (x + \sin z) dxdydz = \int_T (x(x-y) - \cos(x-y) + 1)\, dxdy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + x - \sin x \right) dx = -\frac{3}{8} + \cos 1.$$