Appello X di AM3 - 4/9/2006

1) Sia

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z}{x^4+y^2+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Allora:
a) discutere la continuitá di $f(x,y,z)$;
b) calcolare le derivate parziali di $f(x,y,z)$ in $(0,0,0)$;
c) discutere la differenziabilitá di $f(x,y,z)$ in $(0,0,0)$;
d) provare o confutare l'affermazione $f \in C^1(\{0\})$.

2) Sia $F(x,y,z) = x^2e^y + \cos y \sin z + z^2 \sin x$. Allora:
(a) rappresentare come grafico di un'opportuna funzione g l'insieme $\{F = 0\}$ localmente in $p_0 = (0,0,0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di p_0 per cui tale rappresentazione valga.
(b) trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g rispetto a zero.

3) Siano $f(x,y,z) = (1 + x^2 + y + z^2)e^{x-y-z}$ e $D = \{(x,y,z) : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1\}$. Calcolare il valore e i punti di massimo/minimo assoluto di $f(x,y,z)$ su D.

4) Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = xe^{-x} \\ y(0) = \dot{y}(0) = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

5) Siano

$$\omega_1 = -\frac{\sin x}{1+y^2}dx + \left(-2\frac{y\cos x}{(1+y^2)^2} + \frac{z\cos y}{1+z^4}\right)dy + \frac{1-3z^4}{(1+z^4)^2}\sin y dz$$

una 1-forma definita in $\mathbb{R}^3$ e $S = \{(x,y,z) : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$ una porzione di paraboloide. Allora:
a) determinare una primitiva $f(x,y,z)$ di ω_1;
b) ponendo $\omega_2 = d\left(f^2(x,y,0)\right) + ydx$, calcolare $\int_{\partial^+ S} \omega_2$;
c) verificare direttamente il Teorema di Stokes per il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(y, xz, y^2z\right)$ sulla superficie S.

6) Calcolare $\int_E (x + \sin z)\, dxdydz$, ove $E = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq x - y\}$.