Recupero I Esonero di AM3 - 29/4/2006 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
(a) Osserviamo che

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x^2+y+z^2=0\,, \quad \lim_{(0,y,z)\to(0,0,0)} \sin y+z^3=0.$$

Quindi $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0=f(0,0,0)$.
(b) Abbiamo problemi in punti della forma $(0,y,z)$. Poiché $y\to f(0,y,z)=\sin y+z^3$, la derivata di $f(0,y,z)$ in y è data semplicemente da $\partial_y f(0,y,z)=\cos y$. Analogamente, otteniamo $\partial_z f(0,y,z)=2z$. Il problema nasce dalla derivata in x in punti $(0,y,z)$. Infatti, per $h\neq 0$ abbiamo:

$$\frac{f(h,y,z)-f(0,y,z)}{h}=\frac{h^2+y+z^2-\sin y-z^3}{h}.$$

Il limite di tale quantitá per $h\to 0$ esiste se e solo se $y=z=0$. Quindi, $\partial_x f(0,0,0)=0$ e la funzione f risulta non ammettere derivata parziale in x nell'insieme $\{(0,y,z):y,z\in\mathbb{R}\}\setminus\{(0,0,0)\}$. Quindi $\nabla f(0,0,0)=(0,1,0)$.
(c) Poiché la funzione f non ammette derivate parziali in un intorno completo dell'origine, non ha senso mostrare la continuitá di tali derivate nell'origine. Usiamo invece la definizione. Abbiamo che:

$$\Delta(x,y,z)=\frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-<\nabla f(0,0,0),((x,y,z)>}{|(x,y,z)|}=\begin{cases}\frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } x\neq 0\\ \frac{\sin y+z^3-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } x=0.\end{cases}$$

Poiché

$$\frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\leq\sqrt{x^2+z^2}\to 0 \quad \text{se } (x,y,z)\to(0,0,0)$$

e

$$\frac{|\sin y+z^3-y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\leq\frac{|\sin y-y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{|z|^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\leq\left|\frac{\sin y}{y}-1\right|+z^2\to 0 \quad \text{se } (x,y,z)\to(0,0,0),$$

otteniamo che $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}|\Delta(x,y,z)|=0$. Quindi la funzione f è differenziabile in $(0,0,0)$.
(d) La funzione g é differenziabile in $(0,0,0)$ come composizione della funzione $w(x,y,z)=(f(x,y,z),x+y)$ differenziabile in $(0,0,0)$ e della funzione $h(s,t)$ differenziabile in $w(0,0,0)=(0,0)$. Inoltre, vale la formula: $J_g(0,0,0)=J_h(0,0)J_w(0,0,0)$.
Abbiamo che

$$J_h(0,0)=\begin{pmatrix}-2s\sin(s^2) & \cos t\\ e^s+\ln(1+t) & \frac{s}{1+t}\end{pmatrix}(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad J_w(0,0,0)=\begin{pmatrix}\nabla f(0,0,0)\\ 1\ \ 1\ \ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0.\end{pmatrix}$$

Quindi

$$J_g(0,0,0)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0.\end{pmatrix}$$

Esercizio 2
(a) Sia $p=(0,0,0)$. Calcoliamo prima di tutto

$$\nabla F(x,y,z)=\left(-\sin x\cos y e^z,-\cos x\sin y e^z,\cos x\cos y e^z+2z\cos(z^2)\right).$$

Allora $F(p) = (0,0)$ e $\nabla F(p) = (0,0,1)$. Essendo $\partial_z F(p) = 1$ invertibile con inversa $T = 1$, possiamo applicare il Teorema della Funzione Implicita e trovare una mappa $g(x,y) : B_r(0,0) \to B_\rho(0)$, per $r, \rho > 0$ piccoli, che descrive localmente in p l'insieme $\{F = 0\}$ come il grafico $\{(x, y, g(x)) : (x,y) \in B_r(0,0)\}$. Per trovare esplicitamente $r, \rho \in (0,1)$, osserviamo che:

$$\sup_{|(x,y)|<r} |F(x,y,0)| = \sup_{|(x,y)|<r} |\cos x \cos y - 1| \leq \sup_{|(x,y)|<r} (|\cos x||\cos y - 1| + |\cos x - 1|) \leq 2r \leq \rho$$

non appena $r \leq \frac{\rho}{2}$, ove $|1 - \cos s| = |\sin \xi||s| \leq |s|$ per il Teorema di Lagrange.
Abbaimo inoltre che per $\rho \leq \frac{1}{12}$:

$$\begin{aligned}
&\sup_{|(x,y)|<r, |z|<\rho} |1 - \partial_z F(x,y,z)| = \sup_{|(x,y)|<r, |z|<\rho} |1 - \cos x \cos y e^z - 2z \cos(z^2)| \\
&\leq 2\rho + \sup_{|(x,y)|<r, |z|<\rho} |1 - \cos x \cos y e^z| \leq 2\rho + \sup_{|(x,y)|<r, |z|<\rho} (|1 - \cos x \cos y| + |\cos x \cos y (e^z - 1)|) \\
&\leq 6\rho \leq \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

in vista delle precedente stima e di $|e^s - 1| = e^\xi |s| \leq e|s| \leq 3|s|$ dal Teorema di Lagrange. Basta quindi scegliere $\rho = \frac{1}{12}$ e di conseguenza $r = \frac{\rho}{2} = \frac{1}{24}$.
b) Abbiamo $g(0,0) = 0$ e $g(x,y)$ soddisfa:

$$0 = \cos x \cos y e^{g(x,y)} - \cos\left(g^2(x,y)\right) \qquad \forall\, (x,y) \in B_r(0,0).$$

Derivando in x tale relazione otteniamo:

$$0 = -\sin x \cos y e^{g(x,y)} + \cos x \cos y e^{g(x,y)} \partial_x g(x,y) + 2g(x,y) \partial_x g(x,y) \sin\left(g^2(x,y)\right) \qquad \forall (x,y) \in B_r(0,0).$$

Quindi $\partial_x g(0,0) = 0$ e, per simmetria di x e y, $\partial_y g(0,0) = 0$. Derivando ulteriormente in x e y in $(0,0)$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
&0 = -\cos x \cos y e^{g(x,y)} + \cos x \cos y e^{g(x,y)} \partial_{xx} g(x,y) \mid_{x=y=0} = -1 + \partial_{xx} g(0,0) \\
&0 = \cos x \cos y e^{g(x,y)} \partial_{xy} g(x,y) \mid_{x=y=0} = \partial_{xy} g(0,0).
\end{aligned}$$

Per simmetria di x e y, abbiamo che $\partial_{xx} g(0,0) = \partial_{yy} g(0,0) = 1$, $\partial_{xy} g(0,0) = 0$. Quindi lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $g(x,y)$ in $(0,0)$ viene: $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + O\left(|(x,y)|^3\right)$.

Esercizio 3
(a) Dato $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 1$, l'insieme A rappresenta la porzione del paraboloide $\{\phi = 0\}$ nel semispazio superiore $\{z \geq 0\}$. I punti di massimo/minimo assoluto di f su A possono trovarsi in $A_0 = A \cap \{z > 0\}$ oppure in $A_1 = A \cap \{z = 0\}$.
Per trovare gli eventuali candidati in A_0, studiamo i punti critici vincolati di $f(x,y,z)$ su tutto il paraboloide $\{\phi = 0\}$. Dal Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange, dobbiamo risolvere il sistema

$$2x(1 - \lambda) = 0\,, \;\; 2y(2 - \lambda) = 0\,, \;\; 6z - \lambda = 0 \quad x^2 + y^2 + z - 1 = 0.$$

Se $\lambda \neq 1, 2$, abbiamo che $x = y = 0$ e quindi $z = 1$. Se $\lambda = 1$, abbiamo che $y = 0$, $z = \frac{1}{6}$ e quindi $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$. Se $\lambda = 2$, abbiamo che $x = 0$, $z = \frac{1}{3}$ e quindi $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Otteniamo quindi i punti $M = (0,0,1)$, $P_\pm = (\pm\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \frac{1}{6})$ e $Q_\pm = (0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})$, tutti accettabili poiché si trovano in A_0.
Consideriamo adesso f in $A_1 = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 = 1\}$, il cerchio unitario nel piano x, y. Consideriamo la restrizione di f al piano $\{z = 0\}$: $g(x,y) = f(x,y,0) = x^2 + 2y^2$. Il problema si riduce adesso allo studio della funzione di due variabili g sul cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$. Invece del Teorema dei Moltiplicatori

di Lagrange, useremo la seguente osservazione: se $x^2+y^2=1$, allora $y \in [-1,1]$ e $1 \leq g(x,y) = 1+y^2 \leq 2$. Il minimo di g si ottiene per $y=0$ (e quindi $x=\pm 1$) e il massimo per $y=\pm 1$ (e quindi $x=0$). Abbiamo che $f(\pm 1, 0, 0) = 1$ e $f(0, \pm 1, 0) = 2$.
Poiché $f(M) = 3$, $f(P_\pm) = \frac{11}{12}$, $f(Q_\pm) = \frac{5}{3}$, ottengo che il valore di minimo/massimo assoluto di f in A è $\frac{11}{12}/3$ ed è assunto in $P_\pm/M$ rispettivamente.
(b) Poiché $f(x,y,z) \geq 0$, il valore di minimo assoluto di f su B è zero ed è raggiunto solo in $(0,0,0)$. Fissati x_0, y_0 tali che $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$, osserviamo inoltre che $z \to f(x_0, y_0, z) = x_0^2 + 2y_0^2 + 3z^2$ è crescente in $0 \leq z \leq 1 - x_0^2 - y_0^2$. Quindi il valore di massimo assoluto di f su B coincide con quello su A.

Esercizio 4
(a) Poiché

$$\|x_n\|_{l^2}^2 = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \ln^2(2 + \frac{1}{kn}) \geq \ln^2 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} = +\infty,$$

abbiamo che $x_n \notin l^2$. A maggior ragione $x_n \notin l^1$ in vista di $l^1 \subset l^2$.
(b)-(c) Dalla disuguaglianza $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ per $x \geq 0$, otteniamo che

$$\|x_n - x\|_{l^1} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln(1 + \frac{1}{2kn}) \leq \frac{1}{2n} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \frac{C_0}{n} \to 0$$

per $n \to +\infty$. Analogamente,

$$\|x_n - x\|_{l^2}^2 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \ln^2(1 + \frac{1}{2kn}) \leq \frac{1}{4n^2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\frac{5}{2}}} = \frac{C_1}{n^2} \to 0$$

per $n \to +\infty$.