

AM3-SOLUZIONI 4

A.A. 2005-2006

Laura Di Gregorio

28 aprile 2006

1. Passando in coordinate polari otteniamo

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta = e^{2\theta} \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta = e^{2\theta} \sin \theta \end{cases}$$

Si ha inoltre

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = \sqrt{5} e^{2\theta} d\theta$$

e sostituendo nell'integrale otteniamo

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2)^2 ds = \sqrt{5} \int_{-\infty}^0 e^{10\theta} d\theta = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

2. Dobbiamo calcolare

$$\int_{\gamma} f ds.$$

Usiamo per l'ellisse la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = x(\theta) = 2 \cos \theta & \theta \in [0, 2\pi[\\ y = y(\theta) = 4 \sin \theta \end{cases}$$

Si trova

$$ds = \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = \sqrt{4 \sin^2 \theta + 16 \cos^2 \theta} d\theta = \sqrt{4 + 12 \cos^2 \theta} d\theta$$

e dunque

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{2\pi} (4 + 12 \cos^2 \theta) d\theta = 20\pi.$$

3. Facendo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = ta \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = ta \sin \varphi & 0 \leq t \leq 1 \\ z = tb \end{cases}$$

e calcolando $d\sigma = at\sqrt{a^2 + b^2}$, si ha che

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma = a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^1 t^2 \int_0^{2\pi} d\varphi dt = \frac{2}{3} \pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4. Si parametrizzi la superficie Γ tramite

$$\varphi(t, u) = (t, u, 1 - t - u)$$

da cui segue che $d\sigma = \sqrt{3} du dt$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} yz\sqrt{1-x} d\sigma &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-t} u\sqrt{1-t}(1-t-u) du dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-t} u\sqrt{1-t} du dt - \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-t} ut\sqrt{1-t} du dt \\ &\quad - \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-t} u^2\sqrt{1-t} du dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\frac{5}{2}}}{2} dt - \sqrt{3} \int_0^1 t(1-t)^{\frac{5}{2}} dt \\ &\quad - \sqrt{3} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\frac{7}{2}}}{2} dt \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{7}(1-t)^{\frac{7}{2}} + 2\frac{\sqrt{3}}{7}t(1-t)^{\frac{7}{2}} + \frac{4\sqrt{3}}{63} - \frac{2\sqrt{3}}{9}(1-t)^{\frac{9}{2}} \right]_0^1 \end{aligned}$$

5. Si ha $ds = \sqrt{\frac{2-t^2}{1-t^2}} dt$ e dunque

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \cos x ds &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2-t^2} dt \\ &= 2 \int \cos^2 y dy \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$