AM3-SOLUZIONI Altri Esercizi 2
A.A. 2005-2006

Laura Di Gregorio

4 maggio 2006

Soluzione 1 .
Il polinomio caratteristico associato

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$$

ha radici immaginarie $\lambda = \pm i\omega$. La soluzione generale è:

$$u(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Soluzione 2 .
Il polinomio caratteristico associato ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}.$$

- Se $a = 1$ allora $\lambda = -1$ e $u_0(t) = ce^{-t}$. La soluzione generale è del tipo:

  $$u(t) = (c_1 t + c_2)e^{-t}$$

  e dai dati iniziali segue che $u \equiv 0$.

- Se $a > 1$ si hanno autovalori complessi coniugati per cui la soluzione generale è:

  $$u(t) = e^{-t}(c_1 \cos \sqrt{a-1}\, t + c_2 \sin \sqrt{a-1}\, t).$$

  Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

  $$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 e^{-1} \sin \sqrt{a-1} = 0 \end{cases}$$

  che è verificata per $c_2 \neq 0$ se $a = k^2\pi^2 + 1$.
  Dunque per tali valori di a si ha una soluzione non nulla.

- Se $a < 1$ si hanno autovalori reali $\lambda_{1,2}$ per cui la soluzione generale è:

  $$u(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}).$$

  Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

  $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2} = 0 \end{cases}$$

  da cui segue che $u \equiv 0$.