

AM3 - Tutorato III

Teorema delle funzioni implicite

Filippo Cavallari e Fabio Pusateri

Lunedì 20 marzo 2006

Esercizio 1. Discutere l'esistenza di una funzione $y = f(x)$ definita in un intorno di $x = 0$ che rappresenti le soluzioni dell'equazione

$$x^2 + \sinh y + e^{xy} = 1$$

e tale che $f(0) = 0$. Dimostrare che f ha un massimo relativo nell'origine.

Esercizio 2. Dimostrare che in un intorno di $(0, 0)$ l'equazione

$$e^{x^2+y^2} - x^2 - 2y^2 + 2 \sin y = 1$$

definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$; dare una stima dell'intorno di definizione di f e della sua immagine; calcolare infine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

Esercizio 3. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| \leq 1$ e sia

$$f(x) = x + v \sin |x|^2$$

per $x \in \mathbb{R}^n$. Si dica se f è invertibile in un intorno di $x = 0$ ed in caso affermativo si trovi $r > 0$ tale che f^{-1} sia definita su $B_r(0)$.