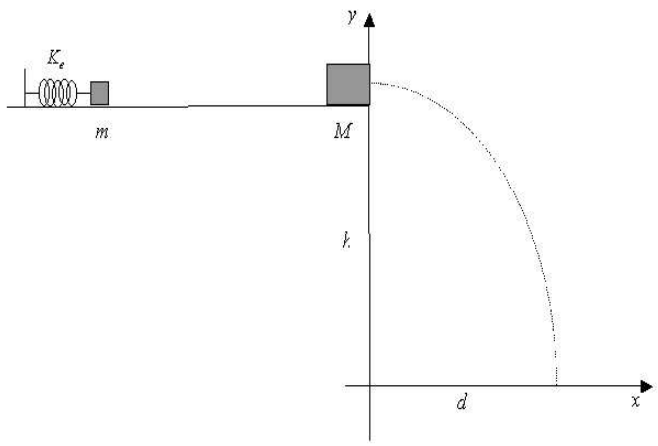
1

Su un piano orizzonatale liscio sono appoggiati due corpi di massa $m = 100g$ e $M = 3m$. I corpo m comprime una molla di massa trascurabile e costante elestica $K_e = 400N/m$; il corpo di masa M si trova fermo sul bordo del piano ad una altrzza $h = 2m$ dal suolo. All'istante $t = 0$, m viene lasciato libero; esso andrá ad urtare M , facendolo cadere. Sapendo che M cade ad una distanza $L = 50cm$ dalla sua posizione iniziale e suppondendo l'urto perfettamente elastico, trovare:

a) il tratto s_0 di cui è compressa la molla a $t = 0$;

b) a quale distanza d cadrá m a causa della risompressione della molla dopo l'urto e della velocitá conseguentemente acquistata in seguito alla sua riespansione.



a) *Sistema massa-molla: conservazione energia*

$$E_i = E_f \tag{1}$$

che in questo caso diventa

$$\frac{1}{2}K_e s_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{2}$$

da cui si ricava facilmente la relazione per s_0:

$$s_0 = \sqrt{\frac{m}{K_e}}v_0 \tag{3}$$

Urto con M

Nell'urto elastico si conservano entrambe la quantitá di moto e l'energia cinetica

$$mv_0 + M \cdot 0 = mv_1 + Mv_2 \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}M \cdot 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \tag{5}$$

che con qualche passaggio algebrico (vedi teoria, urti elastici) puó essere riscritta

$$v_0 - 0 = v_2 - v_1 \tag{6}$$

Sostituendo nella 4 si ottiene

$$mv_0 = mv_1 + 3mv_2 \Rightarrow v_0 = v_1 + 3v_2 \tag{7}$$

da cui si ricava ad esempio

$$v_1 = v_0 - 3v_2 \tag{8}$$

che sostituita nella 6 da

$$v_0 = v_2 - v_0 + 3v_2 \Rightarrow 4v_2 = 2v_0 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2}v_0 \tag{9}$$

e quindi

$$v_1 = v_0 - \frac{3}{2}v_0 = -\frac{1}{2}v_0 \tag{10}$$

Caduta corpo M

Le equazioni del moto di un proiettile (quelle generali) sono

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2 \tag{11}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 \tag{12}$$

In questo caso diventano

$$x(t) = v_2 t \tag{13}$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \tag{14}$$

si ricava il tempo dalla prima e si sostituisce nella seconda

$$t = \frac{x(t)}{v_2} \tag{15}$$

$$y = h - \frac{1}{2} g \frac{x(t)^2}{v_2^2} \tag{16}$$

quando $x = L$, $y = 0$; con questa condizione si puó ricavare v_2 (e cosí) a ritroso s_0:

$$0 = h - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{v_2^2} \Rightarrow h = \frac{1}{2} g \frac{L^2}{v_2^2} \tag{17}$$

quindi

$$v_2^2 = \frac{1}{2} g \frac{L^2}{h} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{g}{2h}} L \tag{18}$$

Dalla 6

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g}{h}} L \tag{19}$$

e dalla 3

$$s_0 = \sqrt{\frac{2gm}{hK_e}} L = 0.025m \tag{20}$$

b) *m torna indietro*

La velocità con cui si muove data dalla 10

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{2h}} L \tag{21}$$

urta con la molla che trasforma tutta l'energia cinetica in energia potenziale elastica (si veda inizio punto a)) e successivamente restituisce tutta l'energia elastica sotto forma di energia cinetica; quindi il corpo m alla fine si muover con velocità uguale in modulo a v_1, ma in verso opposto

$$v_1' = \sqrt{\frac{g}{2h}}L \tag{22}$$

Per calcolare la distanza a cui cade il corpo, si utilizzano di nuovo le equazioni del moto del proiettile 11, applicate al caso

$$x(t) = v_1' t \tag{23}$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

da cui eleminando il tempo

$$y = h - \frac{1}{2}g\frac{x(t)^2}{v_1'^2} \tag{26}$$

Quando $x = d$, $y = 0$ e si ottiene

$$0 = h - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_1'^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2h}{g}}v_1' = \sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{\frac{g}{2h}}L = L \tag{27}$$