GE2, a.a. 2005/2006
Esercitazione n° 4

23 novembre 2005

Diagonalizzazione di matrici simmetriche. Teorema spettrale. Coniche nel piano euclideo.

Il concetto di prodotto scalare ha un'estensione al caso di spazi vettoriali sul campo complesso. Diamo quindi la seguente

Definizione 0.1 *Sia V uno spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Un* **prodotto hermitiano** *su V è un'applicazione $<,>: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ che verifichi le seguenti proprietà:*

1. $< av + bv', w >= \bar{a} < v, w > +\bar{b} < v', w > \quad \forall\, a, b \in \mathbb{C}, \forall\, v, v', w \in V$
2. $< v, aw + bw' >= a < v, w > +b < v, w' > \quad \forall\, a, b \in \mathbb{C}, \forall\, v, v', w \in V$
3. $< v, w >= \overline{< w, v >} \quad \forall\, v, w \in V$
4. $< v, v >= \|v\| \geq 0 \quad \forall\, v \in V$
5. $< v, v >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$

Dunque $<,>$ è antilineare nella prima variabile, mentre è lineare nella seconda variabile. Nel caso in cui i vettori v, w abbiano coordinate reali il prodotto hermitiano si riduce ad un prodotto scalare del tipo già visto per gli spazi vettoriali reali.

Esercizio 1: Dimostrare che se A è una matrice antisimmetrica reale ogni radice non nulla del suo polinomio caratteristico è un numero puramente immaginario.

Sol.: Possiamo pensare che la matrice $n \times n$ A definisca un'applicazione $T_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, dove su $\mathbb{C}^n$ consideriamo il prodotto hermitiano definito da

$$< v, w >=^t \bar{v} w = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i w_i.$$

Consideriamo quindi un autovalore non nullo λ di A ed un suo autovettore x. Abbiamo $Ax = \lambda x$ e quindi

$$^t\bar{x}Ax = ^t\bar{x}(Ax) = ^t\bar{x}(\lambda x) = \lambda ^t\bar{x}x$$

D'altra parte prendendo l'equazione $Ax = \lambda x$ e coniugando, si ottiene

$$A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

ossia anche $\bar{\lambda}$ è un autovalore di A ed inoltre $\bar{x}$ è un autovettore per $\bar{\lambda}$. Quindi possiamo anche scrivere

$$^t\bar{x}Ax = (^t\bar{x}A)x = ^t(^tA\bar{x})x = ^t(^t\bar{A}\bar{x})x = ^t(-\bar{A}\bar{x})x = ^t(\bar{\lambda}\bar{x})x = \bar{\lambda}^t\bar{x}x$$

da cui segue $\lambda = \bar{\lambda}$ ossia $\lambda = ib$ per qualche $b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2: Trovare, utilizzando il teorema spettrale, una matrice ortogonale che diagonalizzi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sol.: Cerchiamo gli autovalori della matrice:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)[(4-\lambda)^2 - 4] - 2(2(4-\lambda) - 4) +$$
$$+ 2(4 - 2(4-\lambda)) = (4-\lambda)[\lambda^2 - 8\lambda + 12] - 4(4 - 2\lambda)$$
$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$$

A è diagonalizzabile in quanto matrice simmetrica, dunque l'autospazio V relativo a $\lambda = 2$ ha dimensione due. Poiché

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

abbiamo $\ker(A - 2I) = \{x + y + z = 0\}$ e dunque $V =< v_1, v_2 >$ con $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$. Invece l'autospazio relativo a $\lambda = 8$ W ha dimensione 1 ed inoltre

$$A - 8I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Tramite l'eliminazione di Gauss si vede che $\ker(A - 8I) = \{-4x + 2y + 2z = 0, y - z = 0\}$ da cui $W =< v_3 >$ con $v_3 = (1, 1, 1)$. Per trovare una matrice *ortogonale* che diagonalizzi A basta ortonormalizzare con il procedimento di Gram-Schmidt la base v_1, v_2, v_3 trovata (si ricordi che le colonne di una matrice ortogonale formano una base ortonormale dello spazio). Quindi si ottiene

$$w_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad w_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), \quad w_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

Pertanto

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale che diagonalizza A e la porta nella forma diagonale

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3: Trovare, utilizzando il teorema spettrale, una matrice ortogonale che diagonalizzi la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ e scriverne la corrispondente forma diagonale.

Sol.: Determiniamo gli autovalori della matrice A_t:

$$\det(A_t - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & t \\ t & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - t^2 = (1-\lambda+t)(1-\lambda-t) = 0$$

implica $\lambda = 1+t, 1-t$. Quando $t = 0$ la matrice A_t diventa la matrice identica e non c'è nulla da fare. Quando invece $t \neq 0$ A_t possiede due autovalori distinti (e quindi gli autospazi corrispondenti sono ortogonali). L'autospazio V relativo a $\lambda = 1+t$ è dato da

$$\ker(A_t - (1+t)I) = \{-tx + ty = 0\} =< v_1 > \quad v_1 = (1,1)$$

Del tutto analogamente per l'autospazio W relativo a $\lambda = 1-t$ si ha

$$W =< v_2 > \quad v_2 = (1,-1)$$

Dunque applicando Gram-Schmidt a v_1, v_2 si ottiene la matrice ortogonale

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e si trova

$$P^{-1}AP =^t PAP = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

Esercizio 4: Trovare l'equazione di una ellisse sapendo che ogni suo punto P verifica la condizione

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = cost$$

dove $F_1 = (-f, 0)$, $F_2 = (f, 0)$ sono i due fuochi dell'ellisse ed $a > f$.

Sol.: Sia $P = (x, y)$ un punto del piano. La condizione data si esprime nel seguente modo:

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$$

ossia

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

Elevando tutto al quadrato si ottiene

$$x^2 + f^2 + 2xf + y^2 = 4a^2 + x^2 + f^2 - 2xf + y^2 - 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

da cui

$$a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = a^2 - xf$$

Elevando ancora una volta al quadrato si ricava

$$a^2(x^2 + f^2 - 2xf) = a^4 + x^2f^2 - 2a^2xf$$

da cui ponendo $b^2 = a^2 - f^2$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ossia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

come voluto.