Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO III - FEDERICO COGLITORE E LIVIA CORSI (5-10-05)

ESERCIZIO 1.

1. Dimostrare che la circonferenza $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio R ha curvatura costate $k = \pm\frac{1}{R}$, dove il segno dipende dal verso di percorrenza.

2. Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare parametrizzata, con curvatura $k(t) = k_0 \in \mathbb{R}$ costante assegnata. Al variare di k_0, cosa si può dire su $\alpha(t)$?

ESERCIZIO 2. (Do Carmo, p. 25 es. 12) Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curava regolare parametrizzata (non necessariamente dall'ascissa curvilinea) e sia $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una riparametrizzazione di $\alpha(I)$ tale che β è parametrizzata dall'ascissa curvilinea $s = s(t)$, e poniamo

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}, \quad \frac{d^3\alpha}{dt^3} = \dddot{\alpha}, \quad ...$$

Dimostrare che:

1. $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\alpha}|}, \ \frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\dot{\alpha}\cdot\ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|^4}$

2. La curvatura di α in $t \in I$ è:

$$k(t) = \frac{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3}$$

(*sugg: usare il fatto che* $(a \wedge b) \wedge c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$)

3. La torsione di α in $t \in I$ è:

$$\tau(t) = -\frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|^2}$$

4. Se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è una curva piana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, la curvatura con segno di α per $t \in I$ è:

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

<u>Esercizio 3.</u> (Do Carmo, p.24 es 10) Consideriamo la mappa:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}), & t > 0 \\ (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

1. Provare che α è una curva differenziabile.

2. Provare che α è regolare per ogni t e che, detta $k(t)$ la curvatura di α in t, $k(t) \neq 0$ per $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $k(0) = 0$

   (*sugg: usare il punto 2 dell'esercizio precedente.*)

3. Mostrare che il limite dei piani osculatori per $t \to 0^+$, è il piano $y = 0$, mentre il limite dei piani osculatori per $t \to 0^-$, è il piano $z = 0$. (Questo implica che il vettore normale è discontinuo in $t = 0$ e mostra perché escludiamo i punti dove $k = 0$).

4. Mostrare che, definendo τ per continuità,si ottiene che $\tau \equiv 0$ anche se α non è una curva piana, contrariamente ai risultati noti.