Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO V - FEDERICO COGLITORE E LIVIA CORSI (19-10-05)

ESERCIZIO 1. (Do Carmo, p. 80 es 7) Dimostrare che la relazione "S_1 è diffeomorfa ad S_2" è una relazione d'equivalenza sull'insieme delle superfici regolari.

ESERCIZIO 2. Sia $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera unitaria e sia $A : S^2 \longrightarrow S^2$ l'applicazione antipodale, ovvero $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Mostrare che A è un diffeomorfismo.

ESERCIZIO 3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione che associa ad ogni $p \in S$ la sua proiezione ortogonale sul piano orizzontale $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Stabilire se π è differenziabile. Per quali punti il differenziale $d\pi_p$ è un'isomorfismo lineare?

ESERCIZIO 4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $d : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $d(p) = |p - p_0|$, dove $p \in S$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $p_0 \notin S$; cioè d è la distanza di p da un punto fissato p_0 non in S. Mostrare che d è differenziabile.

ESERCIZIO 5. Mostrare che il catenoide $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ è diffeomorfo al cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, esibendo un diffeomorfismo.

ESERCIZIO 6. Dimostrare che, date due superfici regolari S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$, un'applicazione $f : S_1 \longrightarrow S_2$ è un diffeomorfismo $\Longleftrightarrow$ f è liscia, biiettiva, e il suo differenziale df_p è un'applicazione lineare invertibile $\forall p \in S_1$