

ESERCIZIO 1. Per ogni coppia di numeri reali  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fissati, sia

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

l'equazione di un'elica che al variare di  $t \in \mathbb{R}$  si avvolge sul cilindro circolare retto in  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $x^2 + y^2 = a^2$ .

1. Calcolare curvatura e torsione della curva  $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^3$  e osservare che non dipendono da  $t$ .
2. Dimostrare che una curva in  $\mathbb{R}^3$  ha curvatura e torsione costanti se e solo se è contenuta in una retta, in un cerchio o in un'elica cilindrica.

ESERCIZIO 2. Quali delle seguenti applicazioni  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare? Giustificare attentamente.

1.  $\mathbf{X}(u, v) = (u, uv, v)$
2.  $\mathbf{X}(u, v) = (u^2, u^3, v)$
3.  $\mathbf{X}(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$

ESERCIZIO 3. Per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a + z^2\}$$

è una superficie regolare? Giustificare attentamente la risposta e disegnare  $S_a$  per almeno un valore del parametro  $a$ .