

ESERCIZIO 1. Sia Σ una superficie in \mathbb{R}^3 e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario i.e. $v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$, dove $e_1, e_2 \in T_p\Sigma$ sono le direzioni principali nel punto p . Calcolare gli zeri della seconda forma quadratica:

$$f : \begin{array}{ll} [0, \pi) & \longrightarrow [k_1, k_2] \\ \theta & \longmapsto k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \end{array}$$

che da la curvatura normale per ogni vettore $v \in T_p\Sigma$. Gli zeri di f sono detti *direzioni asintotiche*. Dimostrare inoltre che si hanno:

1. Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico.
2. Una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico
3. Due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico
4. Infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

ESERCIZIO 2. Calcolare *geometricamente* la seconda forma fondamentale dell'iperboloide iperbolico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 - 1\}$ nel punto $(1, 0, 0)$. Mostrare inoltre che il minimo della seconda forma quadratica si ha per il piano $\{z = 0\}$ e il massimo, per il piano $\{y = 0\}$. Determinare infine le direzioni asintotiche.