Capitolo 1

Concetti base della matematica finanziaria

In questo capitolo presenteremo alcune nozioni elementari della matematica finanziaria. Introdurremo in particolare la composizione periodale e continua degli interessi, il valore presente e futuro di un flusso di cassa ed alcune importanti strategie con cui si opera nei mercati finanziari.

1.1 Interessi

Il più semplice modo di variazione nel tempo del valore di una quantità monetaria disponibile oggi a seguito di un'operazione finanziaria è descritto dalle leggi di composizione degli interessi. Possiamo immaginare di avere a disposizione oggi una quantità di denaro X_0 e di investirla, p.e. depositandola su un conto corrente bancario (che supporremo privo di spese!) o prestandola allo Stato od a qualche azienda privata (si parla in questo caso di Obbligazioni), con la certezza di riavere alla fine del periodo considerato, che indichiamo con $T > 0$, il capitale iniziale più una certa quantità, $X_T = X_0 + I$. In generale si può assumere che la quantità I sia una percentuale del valore iniziale, ovvero $I = rX_0$ dove $r \in (0, 1)$. A tale valore ci si riferisce genericamente come *tasso di interesse*.

1.1.1 Interesse semplice

Si consideri il caso di un orizzonte temporale di un anno, ovvero $T = 1$. Supponiamo di depositare oggi un capitale su un conto corrente (c/c) che paga un certo interesse annuo r:

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{(oggi)} \\ X_0 &= 100 \quad \text{(capitale iniziale)} \\ r &= 10\% \quad \text{(interesse annuo - tasso).} \end{aligned}$$

Allora un anno dopo:

$$\begin{aligned} t &= 1 \quad \text{(un anno dopo)} \\ \tilde{X}_1 &= X_0 + rX_0 \quad \text{(nuovo capitale)} \\ &= 100 + \tfrac{10}{100}100 = 110. \end{aligned}$$

Se indichiamo con r il tasso di interesse su base annua, supponendo che rimanga invariato nel corso del tempo considerato, l'interesse si dice *semplice* se nell'anno successivo l'interesse che si matura è sul capitale iniziale depositato, e non su quanto guadagnato (supponendo di non fare prelievi):

$$\begin{aligned} t &= 2 \quad \text{(due anni dopo)} \\ \tilde{X}_2 &= \tilde{X}_1 + rX_0 \\ &= 110 + \tfrac{10}{100}100 = 120 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{X}_2 = X_0(1 + 2r).$$

Dunque, dopo n anni

$$\tilde{X}_n = X_0(1 + nr)$$

con

$$\begin{aligned} X_0 &= \quad \text{capitale iniziale} \\ \tilde{X}_n &= \quad \text{capitale finale dopo } n \text{ anni} \end{aligned}$$

Quindi l'interesse semplice aggiunge di anno in anno gli interessi sempre e solo sul capitale iniziale.

1.1.2 Interesse composto periodicamente

L'*interesse composto* è l'interesse che matura anche su quanto guadagnato di anno in anno. Definendo r il tasso di interesse su base annua e supponendo che rimanga invariato per tutto il tempo considerato, è chiaro che non c'è differenza tra l'interesse semplice e l'interesse composto solo nel primo anno:

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{(oggi)} \\ X_0 &= 100 \quad \text{(capitale iniziale)} \\ r &= 10\% \quad \text{(interesse annuo - tasso)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 1 \quad \text{(un anno dopo)} \\ X_1 &= X_0 + rX_0 \quad \text{(nuovo capitale)} \\ &= 100 + \tfrac{10}{100}100 = 110. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 2 \quad \text{(due anni dopo)} \\ X_2 &= X_1 + rX_1 \quad \text{(nuovo capitale)} \\ &= 110 + \tfrac{10}{100}110 = 121. \end{aligned}$$

(quindi dopo il secondo anno abbiamo con l'interesse composto 1 euro in più rispetto all'interesse semplice).

Cerchiamo una formula generale:

$$\begin{aligned} X_0 &= \text{capitale iniziale} \\ r &= \text{interesse annuo - tasso} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 1 \quad \text{anno} \\ X_1 &= X_0 + rX_0 = X_0(1+r) \\ \\ t &= 2 \quad \text{anni} \\ X_1 &= X_1 + rX_1 = X_1(1+r) = X_0(1+r)^2 \\ &\vdots \\ t &= n \quad \text{anni} \\ X_n &= X_{n-1} + rX_{n-1} = X_{n-1}(1+r) = X_0(1+r)^n \end{aligned}$$

Dunque, dopo n anni

$$X_n = X_0(1+r)^n$$

con

$$\begin{aligned} X_0 &= \text{capitale iniziale} \\ X_n &= \text{capitale finale dopo } n \text{ anni} \end{aligned}$$

Finora l'interesse era composto annualmente. Chiediamo ora invece alla banca di pagare sempre il 10% di interesse annuo, ma composto semestralmente:

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{(oggi)} \\ X_0 &= 100 \quad \text{(capitale iniziale)} \\ r &= 10\% \quad \text{(interesse annuo - tasso)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 1/2 \quad \text{(semestre dopo)} \\ \\ X_{1/2}1 &= X_0 + \tfrac{r}{2}X_0 = X_0(1 + \tfrac{r}{2}) \\ \\ &= 100 + \tfrac{10}{100}\tfrac{1}{2}100 = 105. \end{aligned}$$

Alla fine del primo anno (e quindi del secondo semestre) riapplico l'interesse composto semestralmente sul capitale finora maturato:

$$\begin{aligned} t &= 1 \;\; \text{un anno} = 2 \;\; \text{semestri} \\ X_1 &= X_{1/2} + \tfrac{r}{2} X_{1/2} = X_0 (1 + \tfrac{r}{2})^2 \\ &= 100(1 + \tfrac{10}{100}\tfrac{1}{2})^2 = 100(1 + 0.05)^2 = 110.25. \end{aligned}$$

Si osservi che la composizione semestrale degli interessi ha prodotto dopo un anno un capitale maggiore che con la composizione annuale: infatti

$$(1 + \frac{r}{2})^2 > (1 + r).$$

Dunque, dopo n anni, cioè $h = 2n$ semestri

$$X_n = X_0 (1 + \frac{r}{2})^h = X_0 (1 + \frac{r}{2})^{2n}.$$

Quindi componendo semestralmente guadagno di più rispetto ad una composizione annuale. Se allora componessi giornalmente[1]:

$$\begin{aligned} t &= 1/365 \quad \text{(un giorno dopo)} \\ X_{1/365} &= X_0 + \tfrac{r}{365} X_0 = X_0 (1 + \tfrac{r}{365}) \\ &= 100 + \tfrac{10}{100}\tfrac{1}{365} 100 = \\ &\;\vdots \\ t &= 1 \;\; \text{un anno} = 365 \quad \text{(giorni dopo)} \\ X_1 &= X_{364/365} + \tfrac{r}{365} X_{364/365} = X_0 (1 + \tfrac{r}{365})^{365} \\ &= 100(1 + \tfrac{10}{100}\tfrac{1}{365})^{365} = 110.51 \end{aligned}$$

Dunque, dopo n anni, ovvero $h = 365\ n$ giorni

$$X_n = X_0 (1 + \frac{r}{365})^h = X_0 (1 + \frac{r}{365})^{365\ n}.$$

In generale, suddividendo l'intervallo temporale di un anno in k sottointervalli di ampiezza $\Delta t = 1/k$, il capitale alla fine dell'anno con composizione dell'interesse r sui sottointervalli Δt è dato da

$$X_1 = X_0 (1 + \frac{r}{k})^k = X_0 (1 + \Delta t\ r)^{1/\Delta t}.$$

[1]Possiamo assumere che un giorno corrisponda alla 365° parte dell'anno. Le convenzioni attuariali per il calcolo degli interessi su differenti basi temporali variano da mercato a mercato.

Sia infine $T > 0$ un dato istante di tempo, che assumiamo essere un multiplo di Δt, $T = h\ \Delta t = h/k$: il capitale maturato al tempo T con composizione dell'interesse r sui sottointervalli di ampiezza Δt è

$$X_T = X_0(1+\frac{r}{k})^h = X_0(1+\frac{r}{k})^{k\ T} = X_0(1+\Delta t\ r)^{T/\Delta t}. \qquad (1.1)$$

Esempio 1.1. *Sia X_0 il capitale posseduto oggi. Se $r = 7\%$, quanti anni ci vogliono per raddoppiare il capitale, assumendo una composizione annuale degli interessi? Se aspetto 7 anni quanto deve valere r per conseguire il raddoppio del capitale?*

Poiché $X_n = X_0(1+r)^n = X_0(1+0.7)^n$, per ottenere il raddoppio del capitale deve essere $X_n = 2X_0$, ovvero $X_0(1+0.7)^n = 2X_0$. Dunque n deve soddisfare la condizione $(1+0.7)^n = 2$ da cui

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.07} = 10.245$$

In base alla stessa relazione $X_n = X_0(1+r)^n = 2X_0$, ma risolvendola rispetto ad r con $n = 7$, otteniamo

$$2 = (1+r)^7 \Longleftrightarrow r = 2^{1/7} - 1 = 0.104.$$

Sia r il tasso di interesse su base annua che componiamo sui sottoperiodi $\Delta t = 1/k$ e sia X_0 il capitale iniziale. In particolare r è detto *tasso nominale*. Dopo un anno avremo

$$X_1 = X_0(1+\frac{r}{k})^k.$$

Si definisce *tasso di interesse semplice effettivo*, $r_{eff}(k)$ equivalente al tasso r composto su k periodi quel tasso di interesse che permette di ottenere lo stesso capitale alla fine dell'anno, ovvero $X_1 = X_0(1 + r_{eff}(k))$. Dalla relazione $(1 + r_{eff}(k)) = (1+\frac{r}{k})^k$ si ha quindi

$$r_{eff}(k) = (1+\frac{r}{k})^k - 1 \Longleftrightarrow r = k\left((1 + r_{eff}(k))^{1/k} - 1\right)$$

1.1.3 Interesse composto continuamente

Nell'interesse composto periodicamente, più è piccolo il periodo di tempo rispetto al quale si compone l'interesse, maggiore è il guadagno. Siamo allora interessati ad intervalli di tempo Δt sempre più piccoli, ovvero al limite per $\Delta t \to 0$: il capitale dopo un anno è dunque

$$X_1 = \lim_{\Delta t \to 0} X_0(1+\Delta t\ r)^{1/\Delta t} = \lim_{k\to+\infty} X_0(1+\frac{r}{k})^k = X_0 e^r,$$

o considerando più generalmente un arbitrario istante di tempo $T > 0$

$$X_T = \lim_{\Delta t \to 0} X_0(1 + \Delta t\ r)^{T/\Delta t} = \lim_{k\to +\infty} X_0(1 + \frac{r}{k})^{k\ T} = X_0 e^{r\ T}.$$

Dunque il capitale maturato al tempo T se l'*interesse* fosse *composto continuamente* è

$$X_T = X_0 e^{r\ T}. \tag{1.2}$$

Esempio 1.2. *Sia* $X_0 = 100$ *Euro il capitale iniziale e* $r = 10\%$ *l'interesse annuale: allora il capitale dopo un anno con composizione continua degli interessi è*

$$X_1 = X_0 e^r = 100 e^{0.1} = 110.52$$

Osserviamo che poichè $(1 + x/k)^k \nearrow e^x$, la composizione continua degli interessi è sicuramente la più vantaggiosa per chi riceve gli interessi e di conseguenza la meno vantaggiosa per chi invece li deve pagare.

Anche in questo caso possiamo definire dei tassi effettivi equivalenti: dalle relazioni $X_1 = X_0 e^{r_c} = X_0(1 + r_{eff}(k)/k)^k$ otteniamo

$$r_c = k \log(1 + r_{eff}(k)/k) \Longleftrightarrow r_{eff}(k) = k(e^{r_c/k} - 1).$$

Occorre notare a questo punto che il tasso di interesse non è certamente una quantità universale:

1.2 Valore temporale del denaro e flussi di cassa

Supponiamo che un deposito su un c/c paghi $r = 10\%$ annuo (interesse semplice) e supponiamo che r sia *certo* (ossia la banca paga l'interesse sicuramente, non fallisce!). Se $X_0 = 100$ Euro è il capitale iniziale, allora *con certezza* dopo un anno il nuovo capitale è $X_1 = 110$ €.

Quindi, il *valore attuale o presente* di 110 euro tra un anno è 100 euro disponibili subito. In altri termini, avere 100 €disponibili subito o avere 110 €disponibili tra un anno è la stessa cosa (se c'è un investimento certo):

$$X_0 = \mathrm{PV}(X_1).$$

Analogamente, il *valore futuro* di 100 euro disponibili subito tra un anno è 110 euro:

$$X_1 = \mathrm{FV}(X_0).$$

Poichè $X_1 = X_0(1+r)$ e' immediato osservare che

$$\mathrm{PV}(X_1) = X_0 = \frac{X_1}{1+r}, \qquad \mathrm{FV}(X_0) = X_1 = X_0(1+r).$$

Assumendo invece una capitalizzazione continua degli interessi alla fine dell'anno si ha

$$\mathrm{PV}(X_1) = X_1 e^{-r}, \qquad \mathrm{FV}(X_0) = X_0 e^{r}.$$

Consideriamo un vettore a due componenti $v \in \mathbb{R}^2$ con $v = (x_0, x_1)$: interpretiamo le componenti del vettore come delle quantità monetarie disponibili a certi istanti di tempo fissati (p.e. $t = 0$ e $t = 1$) sul nostro c/c. Se $x_i > 0$ si parla di *entrate* mentre se $x_i < 0$ si parla di *uscite*. Il vettore v è detto *cashflow* o *flusso di cassa*. I flussi di cassa possono essere positivi o negativi.

Esempio 1.3. *Il vettore* $v = (1, 110)$ *indica la disponibilità di* 1 *Euro oggi e di* 110 *Euro* con certezza *tra un anno.*

Il vettore $v = (1, -10)$ *indica invece la disponibilità di* 1 *Euro oggi e il pagamento di* 10 *Euro che dovrò con certezza effettuare tra un anno.*

Più in generale possiamo definire un flusso di cassa su n istanti temporali noti $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ come un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, dove x_i è una quantità monetaria certamente disponibile (in entrata o in uscita) al tempo t_i.

1.2.1 Valore attuale

Vogliamo definire il valore attuale ed il valore futuro di un flusso di cassa v.

Consideriamo ad esempio il flusso di cassa definito dal vettore $v = (1, 110)$ che rappresenta la disponibilità di 1 Euro oggi e di 110 Euro tra un anno: il suo valore attuale è chiaramente 1 Euro oggi più il valore attuale dei 110 Euro disponibili certamente tra un anno, attualizzato rispetto ad un dato tasso di interesse r con capitalizzazione periodale (annuale): quindi

$$\mathrm{PV}(v) = 1 + \frac{110}{1+r}.$$

Se $r = 10\%$,

$$\mathrm{PV}(v) = 1 + \frac{110}{1 + 10/100} = 101.$$

Ciò vuol dire che adesso, oltre l'euro che ho in cassa, è come se ne avessi altri 100 che sicuramente tra un anno matureranno 10 euro di interesse.

Se dunque $v = (x_0, x_1)$, allora

$$\mathrm{PV}(v) = x_0 + \frac{x_1}{1+r}.$$

Il valore attuale di un flusso di cassa si può estendere a più anni ed a flussi di cassa relativi a tale periodo, avendo assunto che la partizione temporale, ovvero gli istanti di tempo fissati in cui si effettueranno con certezza movimenti monetari, sia fatta compatibilmente con il tipo di tasso di interesse considerato: se $v = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è il flusso di cassa dove x_i rappresenta la quantità monetaria che con certezza sarà movimentata alla fine dell'anno i-esimo e r è il tasso di interesse annuale, allora

$$\mathrm{PV}(v) = x_0 + \frac{x_1}{1+r} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{x_n}{(1+r)^n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{(1+r)^i}.$$

In particolare:

- $v = x_0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathrm{PV}(x_0) = x_0$;
- $v = (0, 0, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathrm{PV}(v) = x_n/(1+r)^n$;

Esempio 1.4. *Sia* $v = (0, 0, 110)$ *e* $r = 10\%$*: allora* $PV(v) = 110/(1+0.1)^2 = 90.91$ *Euro, ossia il valore presente di 110 euro a pagarsi tra due anni con un tasso di interesse certo del* 10% *composto su base annua, è di* 90.91 *euro.*

In generale possiamo dare la seguente

Definizione 1.1. *Siano r il tasso di interesse annuale,* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *istanti di tempo fissati che supponiamo equispaziati,* $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ *(i.e.* $t_i = i\Delta t$*),* $i = 1, \ldots, n-1$ *e* $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *un flusso di cassa relativo a tali tempi. Allora il valore attuale del flusso di cassa v con composizione periodale degli interessi su base* Δt *è*

$$PV(v) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{(1+\Delta t\ r)^i}$$

mentre con composizione continua degli interessi è

$$PV(v) = \sum_{i=0}^{n} x_i e^{-rt_i}.$$

1.2.2 Valore futuro

Possiamo ora definire in modo del tutto analogo il valore futuro di un flusso di cassa. Sia ad esempio $v = (x_0, x_1)$ e fissiamo la base periodale come base annua. Sia r un tasso di interesse certo annuale. Il valore della quantità disponibile oggi x_0 tra un anno è chiaramente $x_0(1 + r)$; inoltre tra un anno si avrà la quantità x_1 e quindi

$$\mathrm{FV}(v) = x_0(1 + r) + x_1.$$

Se $v = (x_0, x_1, x_2)$, si ha invece che il valore di x_0 tra due anni è $x_0(1+r)^2$, il valore di x_1 alla fine del secondo anno è $x_1(1 + r)$ e poichè alla fine del secondo anno si avrà x_2, otteniamo

$$\mathrm{FV}(v) = x_0(1 + r)^2 + x_1(1 + r) + x_2.$$

Per un generico flusso di cassa $v = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dove x_i rappresenta la quantità monetaria che con certezza sarà movimentata alla fine dell'anno i-esimo e r è il tasso di interesse annuale, allora

$$\mathrm{FV}(v) = x_0(1+r)^n + x_1(1+r)^{n-1} + x_2(1+r)^{n-2} + \cdots + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i(1+r)^{n-i}.$$

Definizione 1.2. *Siano r il tasso di interesse annuale, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ istanti di tempo fissati che supponiamo equispaziati, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ (i.e. $t_i = i\Delta t$), $i = 1, \ldots, n-1$ e $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ un flusso di cassa relativo a tali tempi. Allora il valore futuro del flusso di cassa v con composizione periodale degli interessi su base Δt è*

$$FV(v) = \sum_{i=0}^{n} x_i(1 + \Delta t\ r)^{n-i}$$

mentre con composizione continua degli interessi è

$$FV(v) = \sum_{i=0}^{n} x_i e^{rt_i}.$$

C'è qualche relazione tra il valore attuale (PV) ed il valore futuro (FV)?

Studiamo prima il caso con $n = 1$ (1 anno), $v = (x_0, x_1)$ e tasso di interesse annuo r: poichè

$$\mathrm{PV}(v) = x_0 + \frac{x_1}{1 + r}, \qquad \mathrm{FV}(v) = x_0(1 + r) + x_1$$

allora

$$(1+r)\mathrm{PV}(v) = \mathrm{FV}(v), \quad \text{o equivalentemente } \ \mathrm{PV}(v) = \frac{\mathrm{FV}}{1+r}$$

In generale, sia $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$: allora

$$(1+r)^n\mathrm{PV}(v) = \mathrm{FV}(v), \quad \text{o equivalentemente } \ \mathrm{PV}(v) = \frac{\mathrm{FV}}{(1+r)^n}$$

1.2.3 Equivalenza di flussi di cassa e IRR

Supponiamo di dover confrontare dei flussi di cassa, corrispondenti a differenti piani di investimento. Poichè il valore presente è per definizione equivalente a ciò che sarà disponibile alle date future, è naturale confrontare flussi di cassa mediante tali rispettivi valori. Diremo che i due flussi v_1 e v_2 sono *equivalenti* se e solo se il loro valore presente (o equivalentemente il loro valore futuro) è lo stesso:

$$\mathrm{PV}(v_1) = \mathrm{PV}(v_2) \quad (\mathrm{FV}(v_1) = \mathrm{FV}(v_2))$$

Si consideri ora il flusso di cassa $v = (-p, x_1, \ldots, x_n)$, dove $p > 0$ e $x_i > 0, i = 1, \ldots, n$. Un tale flusso rappresenta un accordo finanziario tra due parti in cui a fronte del pagamento iniziale p una delle parti riceve con certezza ed ad istanti prefissati le quantità x_i dalla controparte. Possiamo definire i due flussi relativi ai soli incassi di ciascuna parte, $v_1 = (p, 0, \ldots, 0)$ e $v_2 = (0, x_1, \ldots, x_n)$: affinchè le due parti abbiano posizioni equivalenti, tali dovranno essere i rispettivi flussi, ovvero $\mathrm{PV}(v_1) = \mathrm{PV}(v_2)$, o in modo del tutto analogo $\mathrm{PV}(v) = 0$, condizione che implica

$$p = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(1+r)^k}.$$

Più in generale la condizione che rende equivalenti le posizioni di due controparti che generano un flusso di cassa v è dunque $\mathrm{PV}(v) = 0$.

Esempio 1.5. *Si versino* 10 *rate annue costanti di importo* C € *a partire da oggi per avere una rendita perpetua annuale* R *a partire dal decimo anno. Si determini l'ammontare della rata* R *assumendo un tasso di interesse annuale costante* r*.*

La successione $v = (-C, -C, \ldots, -C, R, R, \ldots)$ *rappresenta il flusso di cassa generato da questo accordo. La condizione* $PV(v) = 0$ *che rende equivalenti le due controparti è dunque*

$$C \cdot \sum_{k=0}^{9} \rho^k = R \sum_{k=10}^{+\infty} \rho^k$$

dove $\rho = \frac{1}{(1+r)}$*, da cui segue*

$$R = C\frac{1-\rho^{10}}{1-\rho} \cdot \frac{1-\rho}{\rho^{10}} = \frac{1-\rho^{10}}{\rho^{10}} = (1+r)^{10} - 1.$$

La struttura di molti accordi finanziari tra due parti si configura naturalmente mediante la definizione di uno specifico flusso di cassa $v = (x_0, x_1, \dots, x_n)$: le componenti negative corrispondono a pagamenti, quelle positive ad incassi. La condizione di equivalenza $\mathrm{PV}(v) = 0$ dipende dal tasso di interesse r. Abbiamo quindi la seguente

Definizione 1.3. *Dato il flusso di cassa* $v = (x_0, x_1, \dots, x_n)$*, quel valore* r *tale che*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+r)^k} = 0$$

è detto Tasso Interno di Rendimento - TIR (o Internal Rate of Return - IRR).

Mediante la sostituzione $z = 1/(1+r)$ (e dunque $r = 1/z - 1$), il TIR di un flusso di cassa è legato alle radici reali positive (se esitono) del polinomio

$$x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n = 0,$$

che ovviamente dipendono dai coefficienti x_i.

1.3 Arbitraggio

Il Sole 24 Ore riportava in una certa data tali quotazioni del valore relativo di monete (*divise*):

$$\begin{aligned} \frac{€}{\$} &= 1.1864 \\ \frac{\$}{Y} &= 116.2800 \\ \frac{€}{Y} &= 137.9545 \end{aligned}$$

(con Y indichiamo lo Yen giapponese). Osserviamo che:

$$\frac{€}{Y} = \frac{€}{\$} \cdot \frac{\$}{Y} = 1.1864 \cdot 116.2800 = 137.9545.$$

Se però avessi per esempio trovato $\frac{€}{Y} = 135$ allora facendo due cambi (€ $\to$ \$ $\to$ Y, operazioni che assumiamo essere senza costi), avrei ottenuto un guadagno. Infatti, cambiando 1000 € in dollari avrei 1186.4 $ che potrei cambiare in 137954.59 yen, corrispondenti a 1021.88 €!

Questa operazione si sarebbe chiamata *arbitraggio*, ossia avrei avuto un guadagno certo a rischio nullo e senza muovere capitali (infatti nell'esempio considerato c'è un'immediata compra-vendita).

Quindi tutti i rapporti di concambio devono essere allineati affinchè non ci siano possibilità di arbitraggio. Nei mercati reali, opportunità di arbitraggio possono verificarsi, ma in genere nei mercati efficienti tendono a scomparire velocemente. Se infatti si verificasse una opportunità come quella descritta nell'esempio precedente, gli operatori del mercato sarebbero tutti portati a vendere euro per comprare dollari e quindi cambiarli in yen, alterando quindi per la legge della domanda-offerta, tutti i rapporti di concambio.

Questo tipo di operazione si estende anche a molte altre situazioni. Risulta dunque di fondamentale importanza in molteplici aspetti della finanza il *principio di assenza opportunità di arbitraggio*: con gli arbitraggi ci si potrebbe arricchire senza investire capitali e ciò non deve essere possibile.

Si pensi a cosa succederebbe se:

- la banca A fa pagare un prestito al 4%
- la banca B paga un deposito al 5%

Se allora prendo un capitale da A e lo deposito in B guadagno l'1% senza aver tirato fuori un soldo dalle tasche!

In realtà a livello mondiale esistono delle opportunità di arbitraggio, durano pochissimo e a volte il loro costo supera un eventuale guadagno.

Nella teoria, il sistema vuole che non ci siano arbitraggi. Nella pratica, può capitare che persone all'interno del sistema finanziario riescano a chiudere arbitraggi a proprio favore.

L'esistenza di possibilità di arbitraggio è strettamente legata alla cosiddetta *legge del prezzo unico*: se due attività finanziarie hanno lo stesso rendimento devono allora avere lo stesso prezzo. La tenuta di questa regola dipende infatti dalla presenza di operatori finanziari pronti ad approfittare di eventuali disallineamenti delle quotazioni, comprando prodotti sottovalutati e vendendo prodotti equivalenti sopravvalutati, realizzando così un profitto (e dunque un *arbitraggio)* ma spingendo contemporaneamente i prezzi verso l'equilibrio. E' evidente come ciò possa essere realizzabile in mercati dove sia possibile contrattare grandi quantità di titoli in breve tempo e con costi di transazione bassi e nei quali le informazioni rilevanti siano ampiamente disponibili per un gran numero di operatori.

1.4 Alcuni meccanismi: vendita allo scoperto e speculazione

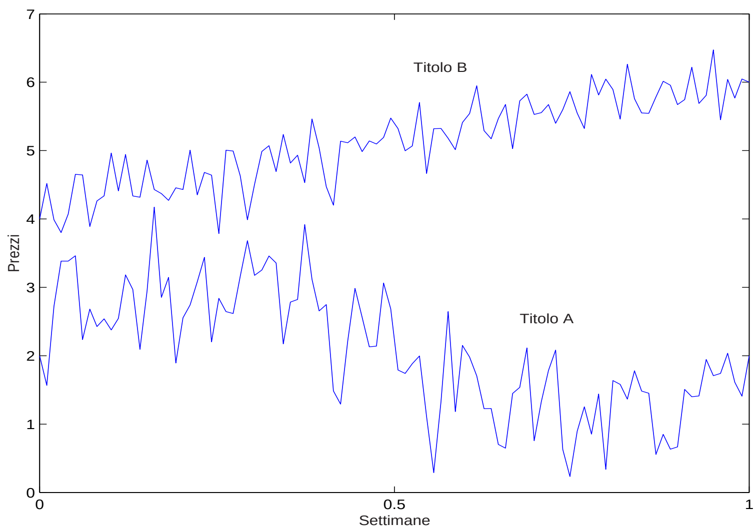
Vendita allo scoperto (short selling). Supponiamo di avere oggi (t=0) due titoli, ad esempio azionari, A e B i cui prezzi spot di oggi siano rispettivamente

$$\begin{aligned} S_0^A &= 2 \text{ €per azione} \\ S_0^B &= 4 \text{ €per azione.} \end{aligned}$$

Al tempo $t = 0$ il mio portafoglio contiene solo un'azione del titolo A, ma credo che B salirà e dunque vorrei comprarlo, ma non ho i soldi sufficienti: faccio allora una *vendita allo scoperto*.

Tramite un broker prendo in prestito un'azione A dal portafoglio di un altro investitore, che mi impegno a restituire ad una scadenza fissata, ad esempio una settimana. Quindi ora il mio portafoglio contiene due azioni A, lo liquido e incasso 4 € e compro istantaneamente un'azione B.

Supponiamo che A e B abbiano il seguente andamento:



Nel caso descritto, alla scadenza della vendita allo scoperto, (ossia una settimana dopo) vendo un'azione B (che è l'unica cosa che ho nel portafoglio), e incasso 6 €= 4 €+ 2 €. Con 2 €ricompro un'azione A e la restituisco al broker, che la vende a chi apparteneva. Con tale operazione dopo una settimana ho un capitale di 4 €, ossia ho guadagnato il 100%. Se nel portafoglio avessi tenuto solo l'azione A e non avessi fatto vendita allo scoperto, dopo una settimana non avrei avuto alcun guadagno.

La vendita allo scoperto è un'operazione molto rischiosa: alla fine potrei non avere i soldi per rendere le azioni prese in prestito.

Nel caso descritto:

- c'è un guadagno se A scende e B sale
- c'è perdita se A sale e B scende

E' importante evidenziare il fatto che nella vendita allo scoperto non si scambiano soldi ma azioni. Essendo un'operazione molto rischiosa, non è ammessa in tutti i mercati.

Speculazione. Sui mercati si può speculare su titoli azionari, beni materiali (petrolio, oro, argento ...), indici azionari, valute .... Vediamo un esempio di speculazione su valute.

Si ritiene che la sterlina (£) sia sopravvalutata e si vuole scommettere sul suo futuro ribasso. Avendo questa convinzione, prendo da una banca in prestito a 3 mesi 10 £con un interesse del 16% annuale, e lo faccio quando il rapporto di cambio è

$$\frac{\pounds}{\$} = 3/2.$$

Appena ricevute le 10 sterline, in base alla convinzione che ho le cambio tutte in dollari, ottenendo quindi 15\$. Supponiamo ora che la mia convinzione si realizzi e che dopo 3 mesi il rappporto sia

$$\frac{\pounds}{\$} = 1.$$

Allora ricambio i 15\$ in sterline, ottenendo 15$\pounds$: restituisco alla banca le 10 sterline prese in prestito più 4$\pounds$ di interesse. Mi resta quindi 1$\pounds$ di profitto. La scommessa è stata vincente! Osserviamo che se avessi preso in prestito 10 miliardi di sterline, dopo 3 mesi avrei guadagnato 1 miliardo!

Questo meccanismo di speculazione si basa anche sul fatto che se chiedo una grande quantità di sterline e le cambio subito tutte in dollari, è come se mi stessi liberando delle sterline e il mercato ne risente, tanto più se lo fanno anche altri investitori sulla mia scia. Scegliendo poi il momento politico adatto, il guadagno è garantito!! E' ciò che fece il finanziere ungherese Soros con il suo *Quantum fund* nel 1992, speculando al ribasso contro la lira italiana e la sterlina inglese e guadagnando in una notte 1 miliardo si sterline.

Se l'obiettivo dell'investitore è preservare nel tempo un capitale (ad esempio contro l'inflazione) allora non può entrare nel mercato con un atteggiamento speculativo. E' quindi fondamentale sapere l'obiettivo dell'investitore per capire i suoi movimenti nel mercato.

1.5 Un'estensione: il tasso di interesse dipendente dal tempo

Finora abbiamo considerato un tasso di interesse r su base annua costante nel tempo. Cosa accadrebbe se invece ci dipendesse?

Sia $X(t)$ il valore di un deposito bancario al tempo $t > 0$ e si denoti con $r(t)$ il tasso di interesse istantaneo (*spot rate* al tempo t, ovvero il tasso di interesse che si applica al tempo t per il calcolo degli interessi ad un tempo immediatamente successivo $t + \Delta t$, con Δt sufficientemente piccolo. Dunque

$$X(t + \Delta t) = X(t) + X(t)r(t)\Delta t,$$

come nel caso continuo, questa volta con il tasso r dipendente dal tempo. Poiche' stiamo immaginando Δt piccolo, possiamo passare al limite per $\Delta t \to 0$ che, assumendo l'esistenza della derivata prima (da destra), permette di ottenere

$$X(t)r(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{X(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}X(t).$$

Il valore del deposito $X(t)$ è dunque soluzione del problema di Cauchy (equazione differenziale ordinaria a coefficienti non costanti)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) & = & r(t)X(t) \\ X(0) & = & X_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

la cui soluzione (per verifica diretta!) è data da

$$X(t) = X_0 e^{\int_0^t r(s)ds}. \tag{1.4}$$

La formula precedente permette di scrivere il valore attuale ed il valore futuro in termini del tasso istantaneo:

$$\mathrm{FV}(X_0) = X(t) = X_0 e^{\int_0^t r(s)ds}, \quad \mathrm{PV}(X(t)) = X_0 = X(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}.$$

Osserviamo infine che se $r(t) \equiv r$ riotteniamo le formule introdotte nei paragrafi precedenti.

Concludiamo la sezione descrivendo una generalizzazione un po' più realistica della dinamica di un deposito bancario $X(t)$, ammettendo la possibilità di prelievi e versamenti. Indichiamo quindi con $C(t)$ il totale dei prelievi (o consumi) al tempo t e con $I(t)$ il totale dei versamenti (o entrate), funzioni che assumiamo derivabili con derivata $c(t)$ e $i(t)$ rispettivamente. Poichè nell'intervallo $[t, t + \Delta t)$ i versamenti sono $I(t + \Delta t) - I(t)$ ed i prelievi $C(t + \Delta t) - C(t)$ avremo chiaramente

$$X(t + \Delta t) = X(t) + X(t)r(t)\Delta t + I(t + \Delta t) - I(t) - (C(t + \Delta t) - C(t)).$$

Dividendo per Δt e facendo il limite per $\Delta t \to 0$, otteniamo

$$\frac{d}{dt}X(t) = r(t)X(t) + i(t) - c(t),$$

ovvero la dinamica di $X(t)$ è descritta dal seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) & = & r(t)X(t) + i(t) - c(t) \\ X(0) & = & X_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

la cui soluzione (verifica diretta!) è data da

$$X(t) = \left(X_0 + \int_0^t (i(s) - c(s))e^{-\int_s^t r(u)du} ds \right) e^{\int_0^t r(s)ds}. \tag{1.6}$$