

AM2-2006: Tracce delle lezioni-I settimana

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE. Siano f_n , $n \in \mathbf{N}$ funzioni definite su di un sottoinsieme E di \mathbf{R} .

Se, $\forall x \in E$, **esiste finito** $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, diremo che la successione di funzioni f_n **converge puntualmente** (o semplicemente) in E alla funzione

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in E.$$

ESEMPLI. Se $f_n(x) \equiv a_n$, $x \in E \subset \mathbf{R}$, le f_n convergono se e solo se a_n converge e, in tal caso, $\lim_n f_n(x) \equiv \lim a_n$.

Se $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, allora f_n converge alla funzione che vale zero in $[0, 1)$ e vale 1 in $x = 1$.

In generale le proprietà delle f_n non si conservano nel limite puntuale. Nell'esempio $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ le f_n sono continue, ma il loro limite non lo è.

CONVERGENZA UNIFORME. Se f_n converge puntualmente in E ad f , si dice che la convergenza è uniforme (in E) se

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

NOTA. Chiederemo di regola che le f_n siano limitate in E : $\sup_{x \in E} |f_n(x)| < +\infty$.

ESEMPLI. 1. La successione $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a zero in $[0, a]$ se $0 < a < 1$, ma la convergenza **non è uniforme** in $[0, 1)$. Infatti

$$\sup_{x \in [0, a]} x^n = a^n \rightarrow 0 \quad \text{mentre} \quad \sup_{x \in [0, 1)} x^n = 1$$

2. (**Traslazioni**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0, 1)$. Siano $f_n(x) := f(x - n)$ le traslate di f . Allora $f_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza **non è uniforme**, giacché $\sup_{\mathbf{R}} |f_n| = \sup_{\mathbf{R}} |f|$.

3. (**Cambi di scala**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0, 1)$. Siano $f_n(x) := f(nx)$. Allora $f_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza **non è uniforme**, giacché $\sup_{\mathbf{R}} |f_n| = \sup_{\mathbf{R}} |f|$.

4. $f_n(x) := \min\{n, \frac{1}{x}\} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x}, \forall x \in (0, 1]$, ma la convergenza **non é uniforme** in $(0, 1]$. Infatti $\sup_{(0,1]} \frac{1}{x} = +\infty$ mentre vale chiaramente la seguente

Proprietá.

$$\sup_{x \in E} |f_n(x)| < +\infty, \quad f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f \quad \text{uniformemente in } E \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty$$

Infatti, $|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon + \sup_E |f_{n_\epsilon}(x)| \quad \forall x \in E$

In contrasto, come visto in 4), il limite semplice di una successione di funzioni limitate non é in generale una funzione limitata. Un altro **esempio**:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2} \rightarrow_n \frac{1}{x} \quad (\text{convergenza, non uniforme, in } E = \{x \neq 0\}; \text{ la convergenza é però uniforme in } \{|x| \geq \delta > 0\}: \quad |x| \geq \delta \Rightarrow \left| \frac{nx}{1+nx^2} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x^2(1+nx^2)} \leq \frac{1}{\delta^2(1+n\delta^2)}).$$

Il criterio di Cauchy.

f_n é uniformemente convergente in E se e solo f_n é " **Cauchy uniforme** ":

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon : n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Dimostrazione.

NECESSITÀ: $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $E \Rightarrow \exists n_\epsilon : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in E$ se $n, m \geq n_\epsilon$.

SUFFICENZA: intanto, per ogni fissato x in E , la successione $n \rightarrow f_n(x)$ é di Cauchy, e quindi $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ esiste finito per ogni x in E .

Poi, dall'ipotesi, fissato $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \quad \forall x \in E$$

se $n \geq n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \geq n_\epsilon$ e mandando p all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \quad \forall x \in E$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in E$ e per ogni $n \geq n_\epsilon$ cioè f_n converge uniformemente ad f .

Teorema 1 (la convergenza uniforme conserva la continuità).

$$f_n \in C(E), \quad f_n \rightarrow_n f \quad \text{uniformemente in } E \quad \Rightarrow \quad f \in C(E)$$

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$ siano $n_\epsilon, \delta_\epsilon > 0$ tali che
 $|f_{n_\epsilon}(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall x \in E, \quad |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)| \leq \epsilon \forall x \in E, |x - x_0| \leq \delta_\epsilon.$

Allora $|f(x) - f(x_0)| \leq 2\epsilon, \quad \forall x \in E, |x - x_0| \leq \delta_\epsilon$

NOTA. Se la convergenza non é uniforme il limite puó non essere continuo.

Controesempio: $f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1].$

Teorema 2 (Passaggio al limite sotto segno di integrale)

$$f_n \in C([a, b]), \quad f_n \rightarrow_n f \text{ uniformemente in } [a, b] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Dimostrazione. Infatti, f é continua in $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

NOTA. (i) **In generale,** $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$
 Ad esempio, se $f(x) := \frac{x}{1+x^4},$ si ha $f_n(x) := nf(nx) = \frac{n^2x}{1+n^4x^4} \rightarrow_n 0 \forall x \in \mathbf{R}$
 ma $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n f \rightarrow \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4} \neq 0 = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$

(ii) **Il Teorema 2 non si estende agli integrali impropri.** Ad esempio, se $f \in C(\mathbf{R})$ é limitata ed integrabile in \mathbf{R} con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \neq 0,$ é

$$f_n(x) := \frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n}\right) \rightarrow_n 0 \text{ uniformemente in } \mathbf{R} \text{ ma } \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \neq 0$$

Teorema 3 (il limite delle derivate é la derivata del limite).

Siano I intervallo aperto, $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_n \in C^1(I)$ tali che
 $f_n(x) \rightarrow_n f(x)$ e $f'_n(x) \rightarrow_n g(x)$ in $I.$ Allora

$$f'_n \rightarrow_n g \text{ uniformemente in } I \Rightarrow f \in C^1(I) \text{ e } (\lim_n f_n)' \equiv \lim_n f'_n$$

Dimostrazione. Se $x_0 \in I,$ le ipotesi piú il TFC ed il Teorema 2, danno:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_n(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt$$

NOTA. La convergenza uniforme delle f'_n é essenziale. Controesempio:

Se $f_n(x) := |x|^{1+\frac{1}{n}}$, $x \in (-1, 1)$, si ha $f'_n(x) = (1 + \frac{1}{n})\frac{x}{|x|}|x|^{\frac{1}{n}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|}$, per $x \neq 0$ e $f'_n(0) \rightarrow_n 0$ (la convergenza non é uniforme!) e $f_n(x) \rightarrow |x|$, $\forall x \in (-1, 1)$, che non é derivabile in $x = 0$.

Passaggio al limite negli integrali impropri Se

(i) $f_n \rightarrow_n f$ uniformemente su $[a + \delta, M]$, $\forall \delta > 0, M > a$

(ii) (**equidominatezza**) $\exists g$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x) \forall n, x$ con $\int_a^\infty g < +\infty$

allora $\lim_n \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty \lim_n f_n$

Infatti: $\delta > 0, M > a + \delta \Rightarrow \left| \int_{a+\delta}^M f_n - f \right| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \limsup_n \left| \int_a^\infty f_n - f \right| \leq$

$$\limsup_n \left[\int_a^{a+\delta} |f_n - f| + \int_M^\infty |f_n - f| \right] \leq 2 \int_a^{a+\delta} g + 2 \int_M^\infty g \leq \epsilon \quad \text{se} \quad M \geq M(\epsilon), \delta < \delta_\epsilon$$

Esempio 1. $t_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} t > 0 \Rightarrow \lim_n \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-t_n x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$

Equidominatezza: $t_n \geq \frac{t}{2} \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} e^{-t_n x} \right| \leq e^{-\frac{tx}{2}}, \forall x \geq 0$.

Convergenza uniforme sui limitati: $|x| \leq M \Rightarrow$

$$\left| \frac{\sin x}{x} [e^{-t_n x} - e^{-tx}] \right| \leq |e^{(t-t_n)x} - 1| \leq \epsilon \quad \text{se} \quad |t - t_n| M \leq \delta_\epsilon$$

NOTA Dunque $t \rightarrow \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$ é continua in $(0, +\infty)$

Passaggio al limite in certi integrali impropri senza equidominatezza

f limitata ed integrabile in $[0, +\infty) \Rightarrow \int_0^\infty f(x) e^{-\frac{x}{n}} dx \rightarrow_n \int_0^\infty f(x) dx$

Se $\int_0^{+\infty} |f| < +\infty$ siamo nella situazione di equidominatezza, che invece non sussiste se $\int_0^{+\infty} |f| = +\infty$.

Sia $F(x) := \int_0^x f$, $F(+\infty) := \int_0^{+\infty} f$. Integrando prima per parti ed effettuando poi il cambio di variabile $x = nt$ troviamo

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x}{n}} dx = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} F(x) e^{-\frac{x}{n}} dx = \int_0^\infty F(nt) e^{-t} dt$$

$$\int_0^{\infty} F(nt) e^{-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \lim_n F(nt) e^{-t} dt = \int_0^{\infty} F(+\infty) e^{-t} dt = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

ove il passaggio al limite é lecito perché c'è

$$\text{uniforme convergenza: } |F(nt) - F(+\infty)| = \left| \int_{nt}^{\infty} f \right| \leq \epsilon, \text{ se } nt \geq M_\epsilon$$

$$\text{equidominantezza: } |F(nx)e^{-x}| \leq e^{-x} \sup_{x \geq 0} |F(x)| \text{ e } \sup_{x \geq 0} |F(x)| < +\infty.$$

Esempio.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{n}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Successioni di funzioni: Esercizi e Complementi.

$$\mathbf{1} \quad \text{Fissato } p \in \mathbf{N}, \quad f_n(x) := \frac{n \sin^p x}{x(1+n^2x^2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \forall x > 0$$

La convergenza é uniforme in $[\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$:

$$x \geq \delta \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{n}{\delta(1+n^2\delta^2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Se $p \geq 3$, la convergenza é uniforme anche in $[0, 1]$: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow |f_n(x)| =$

$$\left| \left(\frac{\sin x}{x} \right)^p \frac{nx^{p-1}}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{nx^{p-1}}{1+n^2x^2} \leq \frac{(nx)^2}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n} \left[\sup_{t \in \mathbf{R}} \frac{t^2}{1+t^2} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Invece, se $p \leq 2$, la convergenza in $[0, 1]$ non é uniforme:

$$\sup_{0 < x \leq 1} |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} n^2 \sin^p \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{se } p = 2 \quad \text{e diverge se } p = 1$$

$$\mathbf{2} \quad f_n(x) := \int_0^x \arctan nt dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{2} x \quad \forall x \geq 0 \quad \text{uniformemente sui limitati.}$$

Infatti, $0 \leq x \leq M \Rightarrow \left| \int_0^x \arctan nt dt - \frac{\pi}{2} x \right| \leq \int_0^M |\arctan nt - \frac{\pi}{2}| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
giacché $\arctan nt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ uniformemente in $\{|x| \geq \delta\}$ ed é equidominata in $[0, M] \quad \forall M$, perché é uniformemente limitata: $|\arctan nx| \leq \frac{\pi}{2}$.

$\mathbf{3}$ Sia $r > 0$. $f_n(x) := \frac{nx^r}{1+n^2x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \geq 0$ e la convergenza é uniforme in $[0, +\infty)$ sse $1 < r \leq 2$. Infatti,

$$r > 2 \Rightarrow \sup_{x \geq 0} f_n(x) = +\infty$$

$$1 < r \leq 2 \Rightarrow \sup_{x \geq 0} f_n(x) = n^{1-r} \sup_{s \geq 0} \frac{s^r}{1+s^2} \xrightarrow{n} 0$$

$$0 < r \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \geq 0} f_n(x) = n^{1-r} \sup_{s \geq 0} \frac{s^r}{1+s^2} \geq \sup_{s \geq 0} \frac{s^r}{1+s^2}$$

Se $r \geq 2$ la convergenza é uniforme in $[0, M]$ $\forall M > 0$, perché $r \geq 2 \Rightarrow$

$$f'_n(x) := n \frac{x^{r-1}[r - n^2 x^2(2-r)]}{(1+n^2 x^2)^2} > 0 \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \leq M} f_n(x) = f_n(M) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Se $r \in (0, 1]$, la convergenza é uniforme in $[\delta, +\infty)$ perché, per n grande,

$$x \geq \delta \quad \Rightarrow \quad x \geq \sqrt{\frac{r}{n^2(2-r)}} \quad \Rightarrow \quad f'_n(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} 4. \quad f_n &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} f \quad \text{uniformemente in } [a, +\infty), \quad f_n(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall n \\ &\Rightarrow f(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Infatti, $|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \epsilon + |f_n(x)|$ se $n \geq n_\epsilon$ e quindi

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

Esempio. $e^{-\frac{x^2}{n}} \rightarrow_n 1 \quad \forall x$, quindi la convergenza non é uniforme in \mathbf{R} .

5 (Successioni di funzioni monotone: un Teorema di Dini)

Siano $f_n \in C([a, b])$ monotone. Se $f_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ ed f é continua in $[a, b]$, allora la convergenza é necessariamente uniforme.

Dimostrazione. Possiamo supporre le f_n non decrescenti (basta altrimenti considerare $-f_n$). Scriviamo

$$|f_n(x) - f(x)| = [\max\{f_n(x), f(x)\} - f(x)] + [\max\{f_n(x), f(x)\} - f_n(x)]$$

Notiamo che $g_n(x) := \max\{f_n(x), f(x)\}$ é continua, non decrescente e

$$0 \leq g_n(x) - f(x) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq g_n(x) - f_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Si tratta dunque di provare che tale convergenza é uniforme.

Per assurdo: $\exists c > 0: c \leq m_n := \max_{[a, b]} g_n - f = g_n(x_n) - f(x_n), \quad x_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} x_0$

(ove siamo eventualmente passati ad una sottosuccessione convergente della x_n).

Ora, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon : |f(x) - f(y)| \leq \epsilon \quad \forall x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Per n grande, $x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e quindi, per monotonia,

$$m_n = g_n(x_n) - f(x_n) \leq g_n(x_0 + \delta) - f(x_0 - \delta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

contraddizione. Argomento analogo per $g_n - f_n$.

6 (Convergenza monotona: un altro Teorema di Dini)

Siano $f_n \in C([a, b])$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Se $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \forall x \in [a, b], n \in \mathbf{N}$, allora f_n converge a uniformemente in $[a, b]$.

Dimostrazione. Chiaramente le f_n sono funzioni non negative e

$$\exists x_n \in [a, b] : 0 \leq m_n := \max_{x \in [a, b]} f_n(x) = f_n(x_n)$$

É $m_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) = m_n$ ed $\exists x_0, n_k : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_0$.

Fissato $\epsilon > 0$, sia $f_{n_\epsilon}(x_0) \leq \epsilon$. Siccome f_{n_ϵ} é continua in $x_0 \in [a, b]$,

$$\exists \delta_\epsilon : f_{n_\epsilon}(x) \leq f_{n_\epsilon}(x_0) + \epsilon \leq 2\epsilon \quad \forall x \in [a, b] \cap [x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon]$$

Quindi, per $n_k > n_\epsilon$ tale che $x_{n_k} \in [x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon]$, risulta

$$m_{n_k} = f_{n_k}(x_{n_k}) \leq f_{n_\epsilon}(x_{n_k}) \leq 2\epsilon \quad \text{e quindi} \quad m_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

e quindi, essendo m_n monotona, $m_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

CONTROESEMPI. Intanto, l'ipotesi di continuitá é addirittura necessaria.

I risultati non valgono su intervalli non chiusi: $f_n(x) = x^n$ in $[0, 1)$. La funzione limite ($f \equiv 0$) é continua, le funzioni sono crescenti e convergono in modo decrescente al loro limite, ma la convergenza non é uniforme.

I risultati non valgono su intervalli non limitati: $f_n(x) = \arctan(x - n) \xrightarrow{n} -\frac{\pi}{2}$. Le f_n sono crescenti, convergono in modo decrescente al loro limite puntuale, ma il limite non é uniforme, perché $\sup_{\mathbf{R}} |\arctan(x - n) + \frac{\pi}{2}| = \pi$.

7. $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente in E , $\sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty \Rightarrow$

$$\sup_n \left(\sup_{x \in E} |f_n(x)| \right) < +\infty \quad (\text{ovvero la successione é **uniformemente limitata**})$$

Infatti, la successione numerica $n \rightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$ é limitata (in quanto convergente), cioè $\exists M > 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq M \quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbf{N}$. Quindi

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq M + \sup_{x \in E} |f(x)| \quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbf{N}$$

Esempio. $\frac{1+n^4x^2+n^3x^4}{1+n^4x^2+x^6} \rightarrow_n 1 \quad \forall x$ ma

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{1+n^4x^2+n^3x^4}{1+n^4x^2+x^6} \geq \frac{1+n^6+n^7}{1+n^6+n^6} \rightarrow_n +\infty$$

e quindi la convergenza non é uniforme.

8 (Teorema di Ascoli-Arzelá) Siano $f_n \in C([a, b])$. Supponiamo che

(i) (**equilimitatezza**) $\exists M > 0 : \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbf{N}$

(ii) (**equi uniforme continuitá**) $\forall \epsilon, \exists \delta_\epsilon$ tale che:

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Allora $\exists n_k : f_{n_k}$ converge uniformemente in $[a, b]$.

NOTA. La equiuniforme continuitá é certamente verificata se

$f_n \in C^1([a, b])$ ed esiste M' tale che $\sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x)| \leq M' \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

Infatti le f_n sono allora, per il Teorema del valor medio, tutte Lipshitziane di costante M'

Schema di dimostrazione (nell'ipotesi in Nota)

(i) (**diagonalizzazione di Cantor**) Sia $D := \{x_j : j \in \mathbf{N}\}$ denso in $[a, b]$.

Allora $\exists \alpha_j \in \mathbf{R}, n_k < n_{k+1} : f_{n_k}(x_j) \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \alpha_j \quad \forall j$

Infatti $|f_n(x_1)| \leq M \Rightarrow \exists \alpha_1, \phi_1 : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strettamente crescente tale che

$$|f_{\phi_1(k)}(x_1) - \alpha_1| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k. \quad \text{Uguualmente,}$$

$\exists \phi_2, \alpha_2 : |f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_2) - \alpha_2| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k.$ Notiamo che si ha anche

$|f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_1) - \alpha_1| \leq \frac{1}{\phi_2(k)} \leq \frac{1}{k}$. Iterando, troviamo al passo j :

$$\exists \phi_j, \alpha_j : |f_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_j(k)}(x_i) - \alpha_i| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k, i \leq j$$

Basta ora prendere $n_k = (\phi_1 \circ \dots \circ \phi_k)(k)$

(ii) Sia $f(x_j) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k}(x_j)$. Si ha che

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq M|x_i - x_j| \quad \forall i, j$$

e quindi f si prolunga ad una \bar{f} Lipschitziana (di costante M) in tutto $[a, b]$.

Infatti

$$\begin{aligned} & |f(x_i) - f(x_j)| \leq \\ & \leq |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| + |f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_j)| + |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)| \leq \\ & \leq M|x_i - x_j| + |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| + |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)|, \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Basta ora mandare k all'infinito.

(iii) $f_{n_k} \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \bar{f}$ uniformemente in $[a, b]$.

Infatti, fissato $\epsilon > 0$, siano $N \geq \frac{b-a}{\epsilon}$, $I_j := [a + (j-1)\frac{b-a}{N}, a + j\frac{b-a}{N}]$, $j = 1, \dots, N$. Se $x \in [a, b]$, allora $x \in I_j$ per qualche j . Sia $x_j \in D \cap I_j$. Si ha

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - \bar{f}(x)| & \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_j)| + |f_{n_k}(x_j) - \bar{f}(x_j)| + |f(x_j) - \bar{f}(x)| \leq \\ & \leq 2M \frac{b-a}{N} + |f_{n_k}(x_j) - \bar{f}(x_j)| \end{aligned}$$

e quindi, da $k \geq k_{\epsilon, x_1, \dots, x_N} \Rightarrow |f_{n_k}(x_j) - \bar{f}(x_j)| \leq \epsilon$, segue $|f_{n_k}(x) - \bar{f}(x)| \leq 2\epsilon$.

CONTROESEMPLI.

É essenziale che $[a, b]$ sia un intervallo limitato. Ad esempio $f_n(x) = \arctan(x-n)$ sono equilimitate insieme alle loro derivate, ma f_n non ha estratte uniformemente convergenti perché ogni sottosuccessione della f_n converge, e non uniformemente, a $f(x) := -\frac{\pi}{2}$.

L'ipotesi di equi-uniforme continuità é essenziale. Sia $f(x) := e^{-\frac{x^2}{1-x^2}} \chi_{(-1,1)}$. Siano $f_n(x) = f(nx)$. La f_n é equilimitata, converge (ma non uniformemente) a $\chi_{\{0\}}$, e quindi non ha estratte uniformemente convergenti.

Infatti non c'è equicontinuitá in $x = 0$: $f_n(\delta) - f_n(0) = 1$ se $n \geq \frac{1}{\delta}$.