AM2: Tracce delle lezioni- Settimane X e XI

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

Sia $\quad A \subset \mathbf{R}^n$ e siano $f_i : A \to \mathbf{R}, \quad i = 1, \ldots, m$. Diremo che

$$f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \,, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$$

é funzione di n variabili a valori in $\mathbf{R}^m$. Diremo che f é **continua** in $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$

se $\quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad x \in A, \|x - \overline{x}\| \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(\overline{x})\| \le \epsilon \,.$ Siccome

$\|f(x) - f(\overline{x})\| \ge |f_i(x) - f_i(\overline{x})| \quad \forall i$ e $|f_i(x) - f(\overline{x})|^2 \le \frac{\epsilon^2}{m} \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(\overline{x})\| \le \epsilon,$

si ha che $\quad$ **f é continua se e solo se f_i sono continue**.

In particolare, f é continua in x se e solo se $x_j \to_{j\to+\infty} x \Rightarrow f_i(x_j) \to_{j\to+\infty} f_i(x) \quad \forall i.$

$f \in C(A)$ $\quad$ se f é continua in ogni punto di A. Gli argomenti usati nel caso di funzioni scalari (cioé a valori in $\mathbf{R}$) assicurano che, se $K \subset \mathbf{R}^n$ é **compatto**, allora

$$f \in C(K) \quad \Rightarrow \quad f(K) \quad \textbf{é compatto in } \mathbf{R}^m$$

$$f \in C(K) \quad \Rightarrow \quad \forall \epsilon, \exists \delta : \quad x, y \in K, \ \|x - y\| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| \le \epsilon$$

Il primo risultato é la versione vettoriale del **Teorema di Weierstrass**, mentre il secondo é il **Teorema di Heine-Cantor** e la proprietá indicata é l'**uniforme continuitá** per funzioni vettoriali. Una importante classe di funzioni uniformemente continue é data dalle **funzioni Lipschitziane**

$$f \in Lip(A) \quad \text{se} \quad \exists L > 0 : \quad \|f(x) - f(y)\| \le \|x - y\| \quad \forall \, x, y \in A$$

ESEMPIO $\quad$ Se $\quad \mathcal{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m; \quad j=1,\ldots,n}$ é matrice di m righe ed n colonne, l'operazione di moltiplicazione righe per colonne

$$\mathcal{A}\, h = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} h_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj} h_j \right), \qquad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$$

definisce una **trasformazione lineare** di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$. Questo é un esempio di funzione Lipschitziana: $\quad \|\mathcal{A}\, h - \mathcal{A}\, k\|^2 = \|\mathcal{A}\, (h - k)\|^2 \le$

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} (h_j - k_j) \right)^2 \le \sum_i \left(\sum_j a_{ij}^2 \right) \left(\sum_j (h_j - k_j)^2 \right) = \left(\sum_{ij} a_{ij}^2 \right) \|h - k\|^2$$

MATRICE JACOBIANA, DIFFERENZIABILITÁ

Se O é aperto in $\mathbf{R}^n$, diremo che $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$ se $f_i \in C^1(O, \mathbf{R})$, $\forall i$. La matrice di m righe ed n colonne

$$J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i=1,\dots,m; \quad j=1,\dots,n}$$

avente come i-esimo vettore riga ∇f_i e come j-esimo vettore colonna $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\dots,m}$ si chiama **matrice Jacobiana** di f in x.

ESEMPIO. Se $f \in C^2(O, \mathbf{R})$, allora $J_{\nabla f}(x) = H_f(x)$.

La trasformazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ associata alla matrice Jacobiana,

$$J_f(x)h := (< \nabla f_1(x), h >, \dots, < \nabla f_m(x), h >), \qquad h \in \mathbf{R}^n$$

si chiama **differenziale** in x di f e si indica $df(x)$.

Proposizione 1. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f **é differenziabile**, ovvero

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - J_f(x)h\|}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0 \quad \text{ovvero} \quad f(x+h) = f(x) + J_f(x)h + \circ(\|h\|)$$

Questa non é infatti altro che la scrittura vettoriale delle relazioni

$$f_i(x+h) = f_i(x) + < \nabla f_i(x), h > + \circ_i(\|h\|)$$

che descrivono la differenziabilitá delle funzioni componenti f_i.

Proposizione 2. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f é **localmente Lipschitziana** in O, ovvero se $\overline{B}_r(x_0) := \{x : \|x - x_0\| \le r\} \subset O$, allora

$$\exists L = L(x_0, r) : \qquad \|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Basta infatti ricordare che

$$|f_i(x) - f_i(y)| \le [\sup_{z \in B_r(x_0)} \|\nabla f_i(z)\|] \quad \|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

per concludere che, presi x, y in $\overline{B}_r(x_0)$, risulta

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|^2 \le \quad \|x - y\|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\sup_{z \in B_r(x_0)} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z)\right|\right]^2$$

REGOLA DELLA CATENA

Siano $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$, $g \in C^1(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$. Allora $g \circ f$ é $C^1(O, \mathbf{R}^p)$ e

$$J_{g\circ f}(x) \quad = \quad J_g(f(x)) J_f(x)$$

Infatti, ricordando la formula di derivazione lungo un cammino (qui, avendo fissato $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{j-1}, \overline{x}_{j+1}, \ldots, \overline{x}_n$, il cammino sará $x_j \to f(\overline{x}_1, \ldots, x_j, \ldots \overline{x}_n))$, vediamo che l'elemento di posto ij in $J_{g\circ f}(\overline{x})$ é dato da

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(\overline{x}) =< \nabla g_i(f(\overline{x})), \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) > = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(\overline{x})) \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\overline{x})$$

cioé dall'elemento di posto ij della matrice (prodotto righe per colonne) $J_g(f(\overline{x})) J_f(\overline{x})$.

TEOREMA DEL DINI PER I SISTEMI

Date n funzioni $f_i, i = 1, \ldots, n$ nelle $m+n$ variabili $(t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n)$ tali che $f_i(0, \ldots, 0) = 0 \; \forall i$, ci proponiamo di descrivere **l'insieme delle soluzioni del sistema di n equazioni nelle $m+n$ incognite** t_j, x_i,

$$f_i(t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n) \; = 0 \qquad \forall \, i = 1, \ldots, n$$

vicine alla soluzione nulla $x_i \equiv 0 \equiv t_j$. In forma vettoriale, il sistema si scrive

$$f(t, x) = 0$$

ove $f = (f_1, \ldots, f_n)$ $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$.

Nel seguito denoteremo con $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ la matrice $n \times n$ di elementi $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.
Posto $R_{\delta,\sigma} := B_\delta \times B_\sigma = \{(t, x) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n : \; \|t\| \leq \delta, \; \|x\| \leq \sigma\}$ si ha che:

Se $\det \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right] \neq 0$, allora esistono $\delta > 0$, $\sigma > 0$ ed una funzione $\varphi \in C^1(B_\delta, B_\sigma)$ tali che

$$f(t, x) = 0, \quad (t, x) \in R_{\delta,\sigma} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \varphi(t)$$

cioé l'insieme degli zeri di f é, localmente, il grafico di una funzione di classe C^1 nella variabile t, cioé x puó essere esplicitata in funzione di t. Inoltre

$$J_\varphi(t) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t))$$

SPAZI METRICI ED IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

La dimostrazione del teorema del Dini (per sistemi) si basa sul un principio generale, detto delle contrazioni, che conviene formulare nell' ambito degli spazi metrici.

Definizione di SPAZIO METRICO

Dato un insieme X, si dice **metrica, o distanza** su X una qualsiasi funzione

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$ tale che

(i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$ e $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (**diseguaglianza triangolare**)

La coppia (X,d) si chiama spazio metrico.

Definizione di SPAZIO NORMATO

Sia V spazio vettoriale (su $\mathbf{R}$), $p : V \to \mathbf{R}$ tale che

(i) $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in V$ e $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $p(tx) = |t|p(x) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in V$ e

(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x,y \in V$

Diremo che p é una norma su V e che $(V, p(.))$ é spazio normato. Se non ingenera confusione, scriveremo $\|x\| := p(x)$. Posto $d(x,y) := \|x-y\|$, d é una metrica: ogni spazio normato é in particolare uno spazio metrico.

ESEMPI. Su $\mathbf{R}^n$ si possono definire diverse norme (e corrispondenti metriche):
Se $p \geq 1$, $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ é una norma (la norma euclidea se $p = 2$)
$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : \quad i = 1,\ldots,n\}$ é un'altra norma su $\mathbf{R}^n$.

Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto. Sia $V = C(K, \mathbf{R}^m)$ lo spazio (vettoriale) delle funzioni continue su K e a valori in $\mathbf{R}^m$. Allora

$$\|f\|_\infty := \max_K |f| \qquad \text{é una norma su} \quad C(K, \mathbf{R}^m)$$

Aperti, chiusi, convergenza, continuitá in spazi metrici

Sia (X, d) spazio metrico.

Fissati $x_0 \in X$ ed un numero positivo r, si chiama **palla** aperta di centro x_0 e raggio r l'insieme

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \quad d(x, x_0) < r\}$$

Un sottoinsieme O di X si dice **aperto** se per ogni $x \in O$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset O$. Ad esempio, ogni palla (aperta) é un insieme aperto.
Un sottinsieme C di X si dice **chiuso** se il suo complementare é aperto.
Si vede che l'unione di aperti é un aperto e che l'intersezione di chiusi é un chiuso.
In particolare, $\overline{A} := \cap_{A \subset C,\ C\ chiuso} C$ é il piú piccolo chiuso contenente A.

Una **successione** $x_n \in X$ **converge a** $x \in X$ ($x_n \to_n x$) se $d(x_n, x) \to_n 0$, ovvero se, per ogni fissato $r > 0$, si ha che $x_n \in B_r(x)$ definitivamente.
unicitá del limite: chiaramente, $x_n \to_n x, \quad x_n \to_n y \quad \Rightarrow \quad x = y$.
Una caratterizzazione dei chiusi : come negli spazi euclidei, si vede che
$C \subset X$ é chiuso se e solo se $x_n \in C, \quad x_n \to_n x \quad \Rightarrow \quad x \in C$.

In uno spazio normato si hanno le proprietá (di compatibilitá)

$$x_n \to_n x, \quad y_n \to_n y, t_n, s_n \in \mathbf{R}, t_n \to_n t, s_n \to_n s \quad \Rightarrow \quad t_n x_n + s_n y_n \to_n tx + sy$$

Se (Y, ρ) é un altro spazio metrico, una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** in x se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x) \subset B_\epsilon(f(x))$.
Come per le funzioni di variabile reale, si vede subito che

f é continua in x se e solo se $x_n \to_n x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Una importante classe di funzioni continue é quella delle **funzioni Lipschitziane**:
$f : A \subset X \to Y$ é Lip se esiste $L > 0$ tale che $\rho(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall x, y \in A$.

UN ESEMPIO. Fissato $x_0 \in X$, la funzione 'distanza da x_0', $x \to d(x, x_0)$ é Lipschitziana (e quindi continua) perché
$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(x_0, y), \qquad d(y, x_0) \leq d(x, y) + d(x, x_0) \qquad \Rightarrow$

$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y)$$

In particolare ció , insieme alla caratterizzazione sequenziale dei chiusi, implica che una 'palla chiusa' $\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X : \quad d(x, x_0) \leq r\}$ é un insieme chiuso.

OSSERVAZIONE. Date due qualsiasi norme p_1, p_2 su $\mathbf{R}^n$, queste sono tra loro equivalenti, nel senso che

$$p_1(x_k) \to_k 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_2(x_k) \to_k 0$$

Possiamo supporre : $p_2 = \|.\|_2$ (norma euclidea) e scriviamo $p := p_1$. Indicata con e_i la base canonica di $\mathbf{R}^n$, si ha $x = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$ ($< .,. >$ denota l'usuale prodotto scalare). Intanto $\|x_k\|_2 \to 0 \quad \Rightarrow$

$$< x_k, e_i > \to_k 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad p(x_k) = p(\sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i) \leq \sum_{i=1}^n | < x_k, e_i > | p(e_i) \to_k 0$$

In particolare, p é continua su $(\mathbf{R}^n, \|.\|_2)$. Per il Teorema di Weierstrass, p ha minimo su $\{\|x\|_2 = 1\}$ e quindi $m := \inf_{\{\|x\|_2=1\}} > 0$ e quindi $p(x) = \|x\|_2 p(\frac{x}{\|x\|_2}) \geq m\|x\|_2$ e quindi $p(x_k) \to_k 0 \quad \Rightarrow \quad \|x_k\|_2 \to 0$.

Spazi metrici completi, Spazi di Banach

Una **successione** x_n in uno spazio metrico (X, d) si dice **di Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : \qquad d(x_n, x_m) \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon$$

(X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X é convergente in X.

$(V, \|.\|)$ si dice di **Banach** se, come spazio metrico, é completo:

$x_n \in V$, $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ per n, m grandi $\quad \Rightarrow \quad \exists x \in V : \quad \|x_n - x\| \to_n 0$.

ESEMPI. $\mathbf{R}^n$, munito di una qualsiasi norma, é un Banach.

$V := C([a, b], \mathbf{R})$ munito della norma $\|.\|_\infty$ (o norma della convergenza uniforme) é un Banach. Infatti,

$f_n, f \in V$, $\|f_n - f\|_\infty \to_n 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_n$ converge uniformemente in $[a, b]$ ad f,
f_n é di Cauchy in $(V, \|.\|_\infty) \quad \Leftrightarrow \quad f_n$ é Cauchy uniforme.

Dall'essere Cauchy uniforme segue, come noto, che $f(x) := \lim_n f_n(x)$ esiste per ogni x e la convergenza é uniforme e quindi f é continua, e cioé appartiene a V.

Allo stesso modo, é completo lo spazio dei 'cammini continui' $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^m$ munito della norma $\|\gamma\|_\infty := \max_{[a,b]} \|\gamma(t)\|$ ove $\|\gamma(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t)|^2$.

IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI **(una contrazione di uno spazio metrico completo in sé, ha esattamente un punto fisso)**

Sia (X, d) spazio metrico completo, $C \subset X$ chiuso. Sia $T : X \to X$. Se

(i) $T(C) \subset C$
(ii) $\exists k \in (0,1) : \quad d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad \forall\, x, y \in C$ (T é una **'contrazione'**)

allora $$\exists! x \in C : \qquad Tx = x$$

Unicitá: $Tx = x, \quad Ty = y \quad \Rightarrow \quad x = y.$ Infatti,
$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = 0$ perché $k \in (0,1)$.

Esistenza. Sia $x_0 \in C$. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$x_1 := Tx_0, \quad x_2 := Tx_1, \quad \ldots, \quad x_{n+1} := Tx_n$$

Basta provare che x_n é di Cauchy, perché allora, per completezza, esiste x tale che $x_n \to x$ con $x \in C$ perché C é chiuso. Per continuitá $Tx_n \to_n Tx$. Siccome é anche $x_{n+1} \to x$ avremo $x = Tx$ (unicitá del limite).

Proviamo dunque che x_n é di Cauchy. É $d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq kd(x_1, x_0)$. Ugualmente, $d(x_3, x_2) = d(Tx_2, Tx_1) \leq kd(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0)$. Iterando,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{x_{n-1}}) \leq k^n d(x_1, x_0) \quad \forall\, n$$

Dunque $$d(x_{n+p+1}, x_n) \leq d(x_{n+p+1}, x_{n+p}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq$$

$$\leq \left[k^{n+p} + \ldots + k^n\right] d(x_1, x_0) = k^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} k^j\right] d(x_1, x_0) \ \to_n 0$$

UN ESEMPIO. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^m_t \times \mathbf{R}^n_x, \mathbf{R}^n)$, $f(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = Id$ (Id matrice identitá $n \times n$). **L'equazione** $f(t, x) = 0$ si puó riscrivere come **problema di punto fisso** per $T^t(x) := x - f(t, x)$. Siccome $\frac{\partial T^t}{\partial x_j}(0,0) = 0 \quad \forall j$, per continuitá avremo (vedi Proposizione 2) che, per $0 < \delta \leq \sigma << 1$,

$$x, y \in B_\sigma(0) \subset \mathbf{R}^n, \quad t \in B_\sigma(0) \subset \mathbf{R}^m \qquad \Rightarrow \quad \|T^t(x) - T^t(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$$

$$\|t\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|T^t(x)\| \leq \|T^t(x) - T^t(0)\| + \|f(0, t)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \frac{\sigma}{2} \leq \sigma \quad \forall x \in B_\sigma$$

Dunque T^t é , se $\|t\|$ é piccola, contrazione di una palla chiusa di $\mathbf{R}^n$ in sé ed ha quindi in tale palla esattamente un punto fisso: l'equazione $f(t, x) = 0$ ha , per ogni $t \in B_\delta$ esattamente una soluzione $x = x(t)$ in B_σ.

ESISTENZA ED UNICITÁ PER IL PROBLEMA DI CAUCHY

Sia $f \in C(O, \mathbf{R}^n)$, $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto.

Problema di Cauchy

$$¿\quad \exists \delta > 0,\ \gamma \in C^1((-\delta,\delta), O): \qquad \dot\gamma(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta,\delta), \qquad \gamma(0) = x \quad ?$$

NOMENCLATURA. L'equazione $\dot\gamma(t) = f(\gamma(t))$ é infatti un **sistema di** n **equazioni differenziali** nelle n (funzioni) incognite $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$. La condizione $\gamma(0) = x$ si chiama **condizione iniziale**.

La funzione data f si chiama anche **campo di vettori** in O (i vettori $f(x)$ applicati nei punti $x \in O$) e una soluzione γ si chiama anche **curva integrale** del campo passante per x (é una curva che é tangente in ogni suo punto al campo di vettori f).

Al variare di x in O potrá ottenersi una famiglia di curve $\gamma^x(t)$ che si chiamerá **flusso** generato dal campo f.

Teorema (di Picard) Sia f Lipscitziana di costante k in O aperto di $\mathbf{R}^n$.

Sia $r \in (0,1)$ tale che $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$, e sia $M := \sup\limits_{x \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(x)\|$.

Se $\delta > 0$ é tale che $\delta k < 1$, $\delta M < r$, allora

$$\forall x \in B_r(x_0)\ \exists\,!\,\gamma^x \in C^1((-\delta,\delta), O): \qquad \gamma^x(0) = x, \quad \dot\gamma^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in (\delta,\delta)$$

NOTA. Se $x \in C([a,b], \mathbf{R}^n)$, scriveremo

$$\int\limits_a^b x(t)dt := (\int\limits_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int\limits_a^b x_n(t)dt)$$

Vale la seguente diseguaglianza: $\|\int\limits_a^b x(t)dt\| \le \int_a^b \|x(t)\|dt.$ Infatti

$$\|\int\limits_a^b x(t)dt\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\int\limits_a^b x_i(t)dt\right)\left(\int\limits_a^b x_i(t)dt\right) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \left(\int\limits_a^b x_i(t)dt\right) x_i(t)\right] dt \le$$

$$\int_a^b \left[\|x(t)\|\,\|\int\limits_a^b x(t)dt\|\right] dt = \|\int\limits_a^b x(t)dt\| \int_a^b \|x(t)\|dt \quad \Rightarrow \quad \|\int\limits_a^b x(t)dt\| \le \int_a^b \|x(t)\|dt$$

Prova del Teorema di Picard.

Posto $\gamma_0(t) \equiv x$ sia $\overline{B}_r(\gamma_0) := \{\gamma \in C([-\delta,\delta], \mathbf{R}^n) : \quad \|\gamma - \gamma_0\|_\infty \le r\}$

Siccome $\gamma \in \overline{B}_r(\gamma_0) \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x\| \le r \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x_0\| \le 2r \quad \forall t \in [-\delta, \delta]$

é allora ben definita la funzione $$(T\gamma)(t) := x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad \forall \gamma \in \overline{B}_r(\gamma_0)$$

Intanto, $T\gamma \in C([-\delta,\delta], \mathbf{R}^n)$ e $(T\gamma)(0) = x \quad \forall \gamma \in \overline{B}_r(\gamma_0)$. Inoltre, dalla diseguaglianza integrale in nota e dalle ipotesi, segue che

$$\gamma \in \overline{B}_r(\gamma_0) \quad \Rightarrow \quad \|T\gamma(t) - x\| = \|\int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau\| \le \left|\int_0^t \|f(\gamma(\tau))\|d\tau\right| \le \delta M < r$$

e quindi $T(\overline{B}_r(\gamma_0)) \subset \overline{B}_r(\gamma_0)$. Infine, $\gamma, \beta \in \overline{B}_r(\gamma_0) \quad \Rightarrow$

$$\|T\gamma - T\beta\| = \|\int_0^t [f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))]\, d\tau\| \le \left|\int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\|d\tau\right| \le k\delta < 1$$

Dunque T é una contrazione di $\overline{B}_r(\gamma_0)$ in sé e quindi, per il Teorema delle contrazioni
$$\exists\, !\gamma^x \in \overline{B}_r(\gamma_0) : \qquad T\gamma^x = \gamma^x$$
Dal Teorema Fondamentale del Calcolo: $\dot\gamma^x(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$.

NOTA In realtá l'esistenza si puó dimostrare nella sola ipotesi di continuitá.

Un caso semplice: $\dot x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in (a,b), \qquad 0 < f \in C((a,b))$.

Sia $F(x) := \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)}, \quad x \in (a,b)$. Se $x(t)$ é soluzione , deve essere

$\frac{d}{dt}F(x(t)) \equiv 1$ e quindi $F(x(t)) = t$ ovvero $x(t) = F^{-1}(t)), \quad t \in (F(a), F(b))$

E in effetti $\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t)) \quad \forall t \in (F(a), F(b))$.

Viceversa, **la Lipshitzianitá é essenziale per l'unicitá**. Il problema $\dot x = x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 1$ ha le **infinite soluzioni** $x(t) = (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}, \quad t_0 \ge 1$.