AM2: Tracce delle lezioni-II settimana

SERIE DI FUNZIONI

Date $a_n(x), x \in E$, la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ **converge puntualmente in** E se, per ogni $x \in E$, la serie (numerica) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge, ovvero se la successione delle somme parziali $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j(x)$ converge puntualmente in E.

Scriveremo
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \ := \ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j(x)$$

SERIE UNIFORMEMENTE CONVERGENTI. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ si dice uniformemente convergente in E se $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j(x)$ converge uniformemente in E.

Criterio di Cauchy . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente in E se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_\epsilon : \ n \ge n_\epsilon, p \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ \sup_{x\in E} \ |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \ \le \ \epsilon$$

ovvero $\sum_{n=N}^{\infty} a_n(x) \to_N 0$ uniformemente in E. In particolare,
$\sum_n f_n$ converge uniformemente in $E \ \Rightarrow \ f_n \to_n 0$ uniformemente in E.

Serie totalmente convergenti. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é totalmente convergente in E se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ \sup_{x\in E} \ |a_n(x)| \ < \ +\infty$$

Convergenza totale implica (assoluta) uniforme convergenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in E} |a_n(x)| \ < \ +\infty \ \Rightarrow |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \ \le \ \sum_{j=n}^{n+p} |a_j(x)| \le \sum_{j=n}^{n+p} \sup_{x\in E} \ |a_j(x)| \le \epsilon \ \ \forall x \in E$$

NOTA. La convergenza totale é piú forte della convergenza uniforme. Esempi:

1. Se $a_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge, ovviamente in modo uniforme , ma non é totalmente convergente, perché $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| = +\infty$.

2. Sia $f_n = \chi_{[n-1,n)}$. É $\sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \le \frac{1}{n}$ e quindi la serie converge uniformemente in $\mathbf{R}$, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \ \sup_{\mathbf{R}} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ \frac{1}{n} = +\infty$.

Criterio di Leibnitz. Se $0 \le a_{n+1}(x) \le a_n(x)\ \forall x \in E,\ n \in \mathbf{N}$, allora

$$\sup_{x\in E} a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n(x) \text{ converge uniformemente in } E$$

Intanto, la serie converge puntualmente in E per il criterio di Leibnitz per le serie numeriche. La convergenza é anche uniforme perché

$$-a_{2n-1}(x) \le \sum_{k=2n-1}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \le 0, \quad a_{2n}(x) \ge \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \ge 0 \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow$$

$$|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x)| \le a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \text{uniformemente in} \quad E$$

Teorema (di integrazione, derivazione termine a termine).

(i) Siano $a_n \in C([a,b])$. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é uniformemente convergente in $[a,b]$, allora $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é continua in $[a,b]$.

(ii) Siano $a_n \in C([a,b])$. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é uniformemente convergente in $[a,b]$, allora

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

(iii) Siano $a_n \in C^1(I)$. Se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge in qualche punto di I e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ converge uniformemente in I, allora

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dx}(x)$$

Un esempio . $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$ Da $\sup_{x \ge x_0 > 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^{x_0}}$ segue che la serie converge totalmente in $[x_0, +\infty)$, $\forall x_0 > 1$.

La convergenza non é peró uniforme in $(1, 1+\delta]$, perché f non é limitata vicino ad 1 (mentre le somme parziali sono ovviamente funzioni limitate). Infatti

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \le \frac{1}{n^x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x-1} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} = \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \forall x > 1$$

Che la convergenza non sia uniforme segue anche, immediatamente, dalla:

Proposizione 1. Siano $f_n \in C([a,b])$. Allora:
$\sum_n f_n$ converge uniformemente in $(a,b]$ $\Rightarrow$ $\sum_n f_n(a)$ converge.

Infatti, $S_n(x) := \sum_{j=1}^n f_j(x)$ é Cauchy uniforme in $(a,b]$, cioé $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le \epsilon \ \forall n \ge n_\epsilon,\ p \in \mathbf{N},\ x \in (a,b]$. Per continuitá si ha quindi

$$|S_{n+p}(a) - S_n(a)| \le \epsilon \ \forall n \ge n_\epsilon, \quad p \in \mathbf{N}$$

ovvero $S_n(a)$ é di Cauchy e quindi converge.

Regolaritá: $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ é $C^\infty((1,+\infty))$. Infatti la serie delle derivate k-esime, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\log n)^k}{n^x}$ é totalmente convergente in $[1+\delta,+\infty)$:

$$x \ \ge \ 1+\delta \ \Rightarrow \ \frac{(\log n)^k}{n^x} \ \le \ \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}} < +\infty$$

Un Teorema di integrazione per serie negli integrali impropri.

Siano $f_n \ge 0$ continue in (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$. Se la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sui sottointervalli compatti di (a,b), allora

$$\int_a^b [\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)]\, dx \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Infatti, posto $S(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \ \ge \ \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$

se $\int\limits_a^b S(x)\, dx < +\infty$, la successione delle somme parziali é equidominata e quindi é lecito il passaggio al limite sotto segno di integrale,

se $\int\limits_a^b S(x)\, dx = +\infty$, allora $a < \alpha < \beta < b \quad \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \ \ge \ \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\, dx \ = \ \int_\alpha^\beta S(x)\, dx \rightarrow_{\alpha \to a,\ \beta \to b} = \int_a^b S(x)\, dx \ = \ +\infty$$

NOTA L'ipotesi di uniforme convergenza sui sottointervalli compatti di (a,b) é automaticamente soddisfatta se $S(x) := \sum_n f_n(x)$ é continua in (a,b) (teorema di Dini, applicato a $S - \sum_{k=1}^n f_k$).

Serie di funzioni: esercizi e complementi.

1. La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{1+n^4x^4}$ converge per ogni $x \in \mathbf{R}$, e la convergenza é totale in $|x| \geq \delta > 0$, perché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{|x|\geq\delta} |\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^4}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \max_{|x|\geq\delta} \frac{1}{1+n^4x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^4\delta^4} < +\infty$$

La convergenza non é uniforme in $|x| \leq \delta$, perché $\max\limits_{|x|\leq\delta} |\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^4}| \geq \sin 1$ se $n \geq \frac{1}{\delta}$, e quindi $\frac{|\sin(nx)|}{1+n^4x^4}$ non converge uniformemente a zero in $|x| \leq \delta$.

Che la convergenza non possa essere uniforme si vede anche dal fatto che

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{1+n^4x^4} \qquad \text{non é continua in } x = 0$$

perché $S(\frac{1}{N}) \geq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\sin(n\frac{1}{N})}{1+\frac{n^4}{N^4}}\right| \geq \frac{\sin(N\frac{1}{N})}{1+\frac{N^4}{N^4}} = \frac{\sin 1}{2}$ mentre $S(0) = 0$.

2. $\int\limits_1^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log n} \right) dx < +\infty$. Infatti $\int\limits_1^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log n} \right) dx = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{n^x \log n} \right) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \left[\frac{e^{-x\log n}}{-\log n} \right]_1^{\infty} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} < +\infty$ perché

$$\frac{1}{n\log^2 n} \leq \int\limits_{n-1}^{n} \frac{dx}{x\log^2 x} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n} \leq \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\log^2 x} = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^{\infty} = \frac{1}{\log 2}.$$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^r e^{-nx} = \frac{x^r}{1-e^{-x}}$, $x > 0$. La convergenza é totale in $(0, +\infty)$ se $r > 1$:

$$(x^r e^{-nx})' = rx^{r-1}e^{-nx} - nx^r e^{-nx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r}{n} \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq 0} x^r e^{-nx} = (\frac{r}{n})^r e^{-r}$$

La convergenza non é uniforme in $(0, +\infty)$ se $r \leq 1$: la serie converge infatti, con somma zero, in $x = 0$, mentre $\lim_{x\to 0} f(x) > 0$ se $r \leq 1$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}$ converge totalmente sui limitati: $|\frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}| \leq \frac{|x|}{n^2}$, ma non converge uniformemente in $\mathbf{R}$, perché la successione delle somme parziali $S_N(x) := \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}$ non é Cauchy uniforme:

$$S_{2N}(N) - S_{N-1}(N) = \sum_{N}^{2N} \frac{1}{n} \sin\frac{N}{n} \geq \sin\frac{1}{2} \sum_{N}^{2N} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} \sin\frac{1}{2}$$