AM2: Tracce delle lezioni-III settimana

SERIE DI POTENZE

Dati $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, \quad x, x_0 \in \mathbf{R}$, la serie di funzioni

$$(SP) \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$$

si chiama serie di potenze in $x - x_0$. Nel seguito, sostituendo eventualmente $x - x_0$ con x, supporremo $x_0 = 0$. Dal Criterio della radice segue che:

Proposizione (Cauchy-Hadamard).

$$(i) \qquad |x|\ \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \ < \ 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \ < \ +\infty$$

$$(ii) \qquad |x|\ \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad \text{non converge}$$

Prova. Argomentando in modo diretto:

(i) $\ |x|\ \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \ < \ 1 \quad \Rightarrow \quad \exists d < 1 :\ |x| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} < d \ \Rightarrow\ \exists n_d :$ $|x|\ |a_n|^{\frac{1}{n}} \le d\ \ \forall n \ge n_d \ \Rightarrow\ |a_n x^n| \ \le d^n\ \ \forall n \ge n_d \ \Rightarrow\ \sum_{n=n_d}^{\infty} |a_n\, x^n| \ \le\ \sum_{n=n_d}^{\infty} d^n < +\infty.$

(ii) $\ |x|\ \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \Rightarrow \quad \exists n_k \to_k +\infty :\ |x|\ \ |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \ > 1$ e quindi $x^n a_n$ non converge a zero e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ non converge.

Raggio di convergenza. $\quad r \ = \ (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} \qquad \left(\left(\frac{1}{0} := +\infty,\ \frac{1}{\infty} := 0\right)\right.$

si chiama raggio di convergenza e $\{|x| < r\}$ é l' intervallo di convergenza.

NOTA. Ricordare che $\quad |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \to r \quad \Rightarrow \quad |a_n|^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{r}.$

ESEMPI .

(1) $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^n\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$. Infatti $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$

(2) $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Infatti $\frac{(n+1)!}{n!} \to +\infty.$

(3) $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$. Infatti $(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{n}})^\alpha \to 1$

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = \frac{1}{e}$. Infatti,

$$\frac{n^n}{n!}\,\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \;=\; \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}.$$

NOTA. Dagli esempi precedenti si vede che una serie di potenze puó avere qualsiasi comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza. In (3) :
se $\alpha \geq 0$ la serie diverge in $x = 1$ mentre non converge né diverge in $x = -1$
Se $\alpha \in [-1, 0)$, la serie diverge in $x = 1$ e converge in $x = -1$
se $\alpha < -1$ la serie converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$.
In (4) : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\,\frac{1}{e^n} = +\infty$ perché, dalla formula di Stirling, $\frac{n^n}{n!\, e^n} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi} + \circ(\sqrt{n})}$.
Infine, la serie converge in $x = -\frac{1}{e}$ per il criterio di Leibnitz.

Convergenza totale delle serie di potenze. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza r, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge totalmente in $[-\bar{r}, \bar{r}]$, $\forall \bar{r} < r$:

$$\sup_{|x|\leq \bar{r}} |a_n x^n| = |a_n|\bar{r}^n \quad \text{e} \quad \sum_{0}^{\infty} |a_n|\bar{r}^n < +\infty$$

La somma di una serie di potenze é una funzione C^∞.

Le $a_n(x) := a_n x^n$ sono funzioni C^∞ e la serie delle derivate k-esime

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} x^j$$

é anch'essa serie di potenze ed il suo raggio di convergenza é

$$(\limsup_n |n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} = (\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

Il carattere C^∞ di $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é allora conseguenza della totale convergenza delle serie di potenze e del teorema di derivazione termine a termine.

ESEMPI. 1. $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \;=\; \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) \;=\; \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, x^j, \quad \forall x \in (-1, 1).$

2. Se $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, allora $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ e $f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$. Mostriamo che cé un'unica funzione tale che $f(0) = 1$ e $f' \equiv f$. Infatti, la differenza $d(x)$ tra due funzioni siffatte si scrive $d(x) = \int\limits_0^x d'(t)dt$ e quindi $\max\limits_{[0,\frac{1}{2}]} |d| \leq \frac{1}{2} \max\limits_{[0,\frac{1}{2}]} |d|$ e quindi $d \equiv 0$ in $[0, \frac{1}{2}]$. Partendo adesso da $\frac{1}{2}$ ed iterando l'argomento, concludiamo che $d \equiv 0$ in $[0, +\infty)$ e , analogamente, in $(-\infty, 0]$. Dunque $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x$.

Serie di potenze: esempi e complementi.

1. (serie geometrica e suoi derivati).

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{sse} \quad |x| < 1$$

La convergenza é totale in $[-r, r]$ $\forall\, r < 1$ (non é uniforme in $[1-\delta, 1]$: la funzione somma della serie non é limitata attorno ad 1!). In particolare, se $|x| < 1$:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,dt = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right] dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x)$$

Ad esempio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \log 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \log(1+x)$ $\forall\ x \in (-1, 1)$.

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^n}{n}\,dt\right] = \frac{1}{x} \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{x} \int_0^x \log(1-t)\,dt = \frac{(1-x)\log(1-x) + x}{x} \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

perché $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n(n+1)}\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n(n+1)}\right|$ $\forall x \in [-1, 1]$. Ad esempio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\log 2$.

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = x \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right] = x \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$\forall x \in (-1, 1)$. Ad esempio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

$$(iv) \quad \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n]\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n\, t^{2n}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$(v) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{e^t - 1}\,dt \qquad \forall k \in \mathbf{N}$$

É $\int\limits_0^{\infty} \frac{t^k}{e^t-1}\,dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{t^k e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt = \int\limits_0^{\infty} t^k e^{-t} \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-tn}\,dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} t^k e^{-(n+1)t}\,dt$. Posto $(n+1)t = s$, si ottiene

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-(n+1)t}\,dt = \frac{1}{(n+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} s^k\, e^{-s}\,ds = \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}$$

2. Sia $a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbf{N}, \ r = 1$ il raggio di convergenza di $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Se la serie converge per $x = -1$, allora converge uniformemente in $[-1, 0]$. In particolare,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \to_{x \to -1^+} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Ció segue dal criterio di Leibnitz: $|x| \leq 1 \Rightarrow |a_n x^n| \leq |a_n| \to_n 0$ perché $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. Poi, $|a_{n+1} x^{n+1}| \leq |a_n x^n| \ \forall n, \ \forall x \in [-1, 1]$.

Esempi. $-\log(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \to_{x \to -1^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.

Analogamente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

La proprietá in 2. é un caso particolare del

Teorema di Abel Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge in $x = 1$, allora converge uniformemente in $[0, 1]$. In particolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \to_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

3. Trovare il raggio di convergenza r di

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \ x^n$$

Dallo sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \ x^n \quad \text{valido per} \quad |x| < 1$$

segue (scrivendo $-2x$ al posto di x) che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \ x^n = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} - 1 \quad \forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Dunque il raggio di convergenza é $r = \frac{1}{2}$. Inoltre, sempre dallo sviluppo di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ che converge in $x = 1$ e diverge in $x = -1$, segue che la serie data converge in $x = -\frac{1}{2}$ e diverge in $x = \frac{1}{2}$.