AM2: Tracce delle lezioni-IV settimana

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR

FORMULA DI TAYLOR Sia $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$. Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}(x-x_0)^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)dt \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

Proviamo dapprima (per induzione) che, se $\varphi \in C^\infty([0,1])$, allora

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt \qquad (T)_n$$

$(T)_1$ é il TFC: $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt$. $(T)_2$ si ottiene da $(T)_1$ mediante una integrazione per parti :

$$\int_0^1 \varphi'(t)\, dt \;=\; \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\, dt \;-\; (1-t)\varphi'(t)\,|_0^1 \;=\; \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\, dt \;+\; \varphi'(0)$$

Analogamente, $(T)_{n+1}$ segue da $(T)_n$ mediante integrazione per parti:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)\, dt \;=\; \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\, \varphi^{(n+1)}(t)\, dt + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)$$

Sia ora $|x-x_0| < \delta$ e $\varphi(t) := f(tx+(1-t)x_0),\ t \in [0,1]$. É

$$\varphi(1) = f(x), \quad \varphi(0) = f(x_0), \quad \varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(tx+(1-t)x_0)(x-x_0)^k.$$

Sostituendo, otteniamo da (T_n) la formula di Taylor per f , con rappresentazione integrale del resto

$$R_n(x,x_0) := f(x) - \Big[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\Big].$$

NOTA. Si ha anche

$$R_n(x,x_0) = \tfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar t x + (1-\bar t)x_0) \qquad \text{per un } \bar t = t(x) \in [0,1].$$

É questa la rappresentazione del resto nella forma di Lagrange, e segue dalla rappresentazione del resto in forma integrale e dal teorema della media.

SERIE DI TAYLOR Sia $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

si chiama serie di Taylor di f di punto iniziale x_0

SVILUPPABILITÁ IN SERIE DI TAYLOR

f si dice **sviluppabile in serie di Taylor** attorno ad x_0 se

$$\exists r = r_{x_0} > 0 : \quad f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

UN ESEMPIO: $f(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $|x| < r = \limsup_n |a_n|^{-\frac{1}{n}}$. Infatti $f \in C^\infty((-r,r))$ e $f^{(n)}(0) \;=\; n! a_n$ ovvero $f(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, $|x| < r$.

Si hanno ad esempio i seguenti sviluppi in serie di Taylor (validi per $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1-x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \frac{1}{1+x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad \frac{1}{1+x^2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \;=\; \frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{1-x} \;=\; \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n$$

$$\log(1+x) \;=\; \int_0^x \frac{dt}{1+t} \;=\; \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n]\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$$\arctan x \;=\; \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \;=\; \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}]\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Proposizione $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$ é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad x_0 sse $\exists r > 0 :\; R_n(x, x_0) \to_{n\to+\infty} 0 \;\; \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Infatti $f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \;=\; R_N(x, x_0)$.

In particolare, se per ogni $r > 0$ risulta $\max_{|x|\le r} |f^{(n)}(x)| \;\le\; M_r \quad \forall n$, allora $|x| \;\le r \;\Rightarrow\; |R_n(x)| \;\le\; \frac{r^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \sup_{|x|\le r} |f^{(n+1)}(x)|\, dt \;\le\; \frac{M_r\, r^{n+1}}{n+1!} \to_n 0 \;\Rightarrow$

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

Si ottengono subito, ad esempio, i seguenti sviluppi in serie

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \qquad \forall x$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$$

SERIE BINOMIALE $\qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \qquad \forall x \in (-1,1)$

Infatti, $\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ e, se $a_n := \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)|}{n!}$, é $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$. Poi, $1-t \le 1+tx \quad \forall x \in (-1,1),\ t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \quad |R_n(x)| \le \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1} \int_0^1 [\frac{1-t}{1+tx}]^n (1+tx)^{\alpha-1} dt$$

$$\le \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1} \int_0^1 (1+tx)^{\alpha-1} dt \to 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

Ad esempio, per $x \in (-1,1)$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \ldots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times 2n-1}{2^n \times n!} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n}$$

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$\sinh^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Comportamento agli estremi. Siccome $\frac{2n-1!!}{2n!!} : \frac{2n+1!!}{2n+2!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$, la serie di Taylor di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ converge, per il criterio di Leibnitz, anche in $x=1$ e la convergenza é uniforme in tutto $[0,1]$. In particolare, $\qquad 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{2n-1!!}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Poi, siccome $\frac{2n-1!!}{2n!!} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, le serie di Taylor di $\sin^{-1} x$ e di $\sinh^{-1} x$ convergono assolutamente in 1 e -1 e la convergenza é uniforme in tutto $[-1,1]$. In particolare,

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}, \qquad 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} = \sinh^{-1} 1 = \log(1+\sqrt{2})$$

FUNZIONI ANALITICHE

Una funzione f si dice analitica in un intervallo aperto I se é 'localmente' somma di una serie di potenze:

$\forall x_0 \in I,\ \exists\ a_n, r > 0$ (dipendenti da x_0) tali che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in $(x_0 - r, x_0 + r)$.

NOTA. Una funzione analitica in I, essendo localmente somma di serie di potenze, é $C^\infty(I)$ e $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ ovvero $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ é la serie di Taylor di f attorno a x_0. Tuttavia non tutte le funzioni $C^\infty(I)$ sono analitiche in I:

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é C^∞, con derivate di ogni ordine uguali a zero in $x = 0$: dunque f non é somma della sua serie di Taylor.

Proposizione Sia $f \in C^\infty((a,b))$. Se

$$\exists\ M,\ r > 0 : \quad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \le \frac{Mn!}{r^n} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a,b). Piú precisamente, $\forall\ x_0 \in (a,b)$, si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap (a,b)$$

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che $R_n(x, x_0) \to 0$ al tendere di n all'infinito, per ogni $x \in x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap [a,b]$. E infatti

$$|R_n(x,x_0)| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)| dt \le M(\frac{|x-x_0|}{r})^{n+1} \to 0$$

La somma di una serie di potenze é una funzione analitica.

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza r, e siano $0 < \underline{r} < \overline{r} < r$. Da $\limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{\overline{r}}$ segue che

$$\exists \; \overline{k} : \qquad |a_{j+k}| \; \leq \; \frac{1}{\overline{r}^{j+k}}, \qquad \forall k \geq \overline{k}, \;\; \forall j \in \mathbf{N}$$

Da $f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \, a_{j+k} \, x^j$ segue

$$k \geq \bar{k}, \quad |x| \; \leq \; \underline{r} \; \Rightarrow \quad |f^{(k)}(x)| \; \leq \; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \; \frac{\underline{r}^j}{\overline{r}^j} \; \frac{1}{\overline{r}^k}$$

Usando ora la formula $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \, x^j = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1,1),$ otteniamo

$$|f^{(k)}(x)| \; \leq \; \frac{k!}{\overline{r}^k (1 \; - \; \underline{r} \;\; \overline{r}^{-1})^{k+1}} \; = \; \frac{\overline{r} \; k!}{(\overline{r} \; - \; \underline{r})^{k+1}}, \qquad \forall k \geq \overline{k}, \;\; |x| \leq \underline{r}$$

Dalla Proposizione precedente segue che f é sviluppabile in serie di Taylor (di raggio di convergenza almeno $\overline{r} - \underline{r}$) attorno ad ogni punto dell'intervallo $[-\underline{r}, \underline{r}]$.

Principio di identitá Siano f, g analitiche in (a,b). Allora

$$\exists \, x_0 \in (a,b) : \quad f^{(n)}(x_0) \; = \; g^{(n)}(x_0) \;\; \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad f \equiv g \;\; \text{in}(a,b)$$

Dall'analiticitá: $\exists \delta > 0 : f(x) \; = \; g(x) \quad \forall x \; \in \; (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e quindi

$$b' := \sup\{x < b : \;\; f(t) \; = \; g(t) \quad \forall t \in [x_0, x]\} \; \geq \; x_0 + \delta > x_0$$

Ora, $x < b' \Rightarrow f \equiv g$ in $[x_0, x] \Rightarrow f^{(n)}(x) \; = \; g^{(n)}(x)$ in $[x_0, b'), \;\; \forall n.$

Se fosse $b' < b$, sarebbe , per continuitá, $f^{(n)}(b') \; = \; g^{(n)}(b') \;\; \forall n$ e quindi $f \equiv g$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.

Zeri di funzioni analitiche Una funzione analitica in (a,b) e non identicamente nulla, ha, in (a,b), solo zeri isolati.

Se $x_n \to_n x \in (a,b)$, $f(x_n) = 0$ é $f(x) = 0$ ed inoltre, per il teorema di Rolle, $\exists x'_n$ tra x_n e x tale che $f'(x'_n) = 0$ e quindi $f'(x) = \lim_n f'(x'_n) = 0$ Iterando l'argomento, si trovano, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $x_n^{(k)}$ zeri di $f^{(k)}$ che convergono a x e quindi $f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k$ e quindi $f \equiv 0$.

SERIE DI POTENZE NEL CAMPO COMPLESSO

1. Definizione $z_n \in \mathbf{C}$ converge a z $(z_n \to_n z)$ $\Leftrightarrow$ $|z_n - z| \to_n 0$.

Siccome $|z_n - z|^2 = |Rez_n - Rez|^2 + |Imz_n - Imz|^2$, si ha che:

$$z_n \to_n z \quad \Leftrightarrow \quad Rez_n \to_n Rez \quad \text{e} \quad Imz_n \to_n Imz$$

$$z_n \to_n z \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon : \quad n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |z_n - z_m| \leq \epsilon \quad (\textbf{Cauchy})$$

2. Definizione $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge sse $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} z_n$ converge.
$\sum_n z_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum_n |z_n| < +\infty$.

(**Cauchy**) $\sum_n z_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon :\ |\sum\limits_{n=N}^{N+p} z_n| \leq \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon,\ \forall\, p$.

In particolare, $\sum_n |z_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_n z_n$ converge e in particolare,

$\limsup_n |z_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \ \Rightarrow \ \sum_n |z_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum z_n$ converge. Si ha cosí

3. Cauchy-Hadamard Sia $a_n \in \mathbf{C}$, $r := \left[\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}\right]^{-1}$. Allora

$z \in \mathbf{C}$, $|z| < r \ \Rightarrow \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < +\infty$, $\quad |z| > r \ \Rightarrow$ la serie non converge

r:= raggio di convergenza, $D_r := \{z :\ |z| < r\}$:= disco di convergenza .

ESEMPI. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ converge in $|z| < 1$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

$$\exp\ z \ := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{converge} \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

4. $\exp(z + w) = \exp z + \exp w \qquad \forall\, z,\, w \in \mathbf{C}$. Segue da

5. Lemma (Prodotto secondo Cauchy). $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n| + \sum\limits_{n=0}^{\infty} |w_n| < +\infty \ \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{j+k=n} z_j\, w_k| < +\infty\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} z_j\, w_k) = (\sum_{n=0}^{\infty} z_n)\ (\sum_{n=0}^{\infty} w_n)$$

Infatti, $\exp(z + w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!} \sum\limits_{j+k=n} \frac{n!}{j!\,k!}\, z^j\, w^k) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}) (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}) = \exp z\ \exp w$$

6. Da **4.**: $(\exp z)^p = \exp(pz) \quad \forall p \in \mathbf{N},\ z \in \mathbf{C}$, $\exp p = (\exp 1)^p =:$ e^p, $(\exp(\frac{1}{p}))^p = e$. Dunque $\exp(\frac{1}{p}) = e^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\exp(\frac{p}{q}) = (\exp\frac{1}{q})^p = (e^{\frac{1}{q}})^p = e^{\frac{p}{q}}$:

$x \to \exp x,\ \ x \in \mathbf{R}$ é **prolungamento continuo** di $r \to e^r, r \in \mathbf{Q}$.

7. (i) $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$ (ii) $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$ (iii) $|\exp(it)| = 1\ \forall t \in \mathbf{R}$

Prova: (i) $\exp z \exp(-z) = 1$ (ii) $\exp \overline{z} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \overline{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp z}$

(iii) $|\exp(it)|^2 = \exp(it)\ \overline{\exp(it)} = \exp(it)\ \exp(-it) = 1$.

8. Formule di Eulero $\qquad \exp(\pm it) = \cos t \pm i \sin t \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$

$$\sin t = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}, \qquad \cos t = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Da $\exp(it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$ segue

$$Re\,(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \cos t, \quad Im\,(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin t$$

Dalle formule di Eulero segue che $\exp(2k\pi i) = 1\ \ \forall k \in \mathbf{Z}$, e quindi $\exp(it)$, $t \in \mathbf{R}$ é 2π-**periodica**, $\exp(x + iy + 2\pi i) = \exp(x + iy)$,

ed anche che, $\quad |z| = 1 \ \Rightarrow\ \exists\ !\ t \in (-\pi, \pi] :\ z = \exp(it)$

9. Funzioni circolari ed iperboliche sui complessi

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\sinh z := \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\cosh z := \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

10. (i) $\exp(iz) \equiv \cos z + i \sin z$, $\qquad \exp(-iz) \equiv \cos z - i \sin z$

(ii) $\cos z \equiv \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \equiv \cosh iz \qquad \sin z \equiv \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \equiv \dfrac{\sinh(iz)}{i}$

Da (ii) segue: $\sin z, \cos z$ sono funzioni 2π-periodiche mentre $\sinh z, \cosh z$ sono $2\pi i$-periodiche. Inoltre, $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z \equiv 1$

11. Definizione di $\arg z, \quad \log z, \quad z \in \mathbf{C}$

Dato $z \in \mathbf{C}$, $\arg z$ (**argomento di** z) é l'unico reale in $(-\pi, \pi]$ tale che

$$z = |z| \exp(i \arg z)$$

Notiamo che, per periodicitá, $z = |z| \exp(i(\arg z + 2k\pi)) \;\; \forall\, k \in \mathbf{Z}$. Scriveremo

$$Arg\, z := \{\arg\, z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}\}$$

Ora, dato $w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$

$$\exp z = w \quad \Leftrightarrow \quad \exp(Re\, z)\, \exp(i\, Im\, z) = |w| \exp(i\, \arg\, w) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exp\, Re\, z = |w| \quad \text{e} \quad Im\, z - \arg w \in 2\pi\, \mathbf{Z} \qquad\qquad \text{cioé}$$

$$\exp\, z = w \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{\log|w| + i\, Arg\, w\}$$

Porremo $\qquad Log\, w := \{\log|w| + i\, Arg\, w\} \quad \forall w \in \mathbf{C}, \;\; w \neq 0$

La funzione $log\, w := \log|w| + i \arg\, w$ si chiama valore principale del logaritmo.

Esempi. $Log\, x = \log x + 2k\pi i, \;\; \forall x > 0, \;\; Log\, x = \log|x| + (2k+1)\pi i, \;\; \forall x < 0$.
$log\,(-1) = \pi i, \;\; log\, i = \frac{\pi}{2} i, \;\; Log\,(1 - i) = \log\sqrt{2} + (2k - \frac{1}{4})\pi i$.

Esercizi. $Log\,(zw) = Log\, z + Log\, w$ ove, per $A, B \subset \mathbf{C}$, $A + B := \{a + b : \;\; a \in A, \; b \in B\}$. Infatti $Arg\,(zw) = Arg\, z + Arg\, w$.

$$Log\,(-z) = Log\, z + \pi i \qquad \forall\, z \neq 0.$$

Trovare l'errore in $z^2 = (-z)^2 \Rightarrow Log\,(z)^2 = Log\,(-z)^2 \Rightarrow Log z + Log z = Log(-z) + Log(-z) \Rightarrow 2 Log z = 2 Log(-z) \Rightarrow Log z = Log(-z)$.

12. Potenze in C $\quad$ Se $w, z \in C, w \neq 0$

$$w^z := \exp(z\, Log\, w) = \exp\{z\, [\log|w| + i(arg\, w + 2k\pi)]\} \qquad k \in \mathbf{Z}$$

Esempi. Sia $z = n \in \mathbf{N}$; $\quad w^n = \exp\{n\, [\log|w| + i(arg\, w + 2k\pi)]\} = \exp\{n \log|w|\} \exp\{n\, i(arg\, w + 2k\pi)\} = |w|^n\, [\exp\{i(arg\, w + 2k\pi)\}]^n = w \times \ldots \times w$ $\quad$ (n volte).

Se $z = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, $a^{\frac{1}{n}} = \{|a|^{\frac{1}{n}} \exp\, i\, \frac{arg\, a + 2k\pi}{n}, \;\; k = 0, \ldots, n-1\}$ (le n radici complesse di a). Se $z \notin \mathbf{Q}$, a^z é un insieme infinito. In particolare, $e^z = \exp z$ se e solo se $z \in \mathbf{Z}$.

APPENDICE

A1. Sia $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza $r > 0$. Allora, per ogni $|z_0| < r$, esiste $f'(z_0) := \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Proviamo infatti che $f \in C^\infty(D_r)$:

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z) = f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^k \quad \forall z \in D_r$$

Come nel caso reale, basta provare la formula per $n = 1$. Siano $z,\ z_0 \in D_\rho,\ \rho < r$. É

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}\right|$$

Ora, $|z^n - z_0^n| = |(z-z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})| \le |z-z_0| n \rho^{n-1} \quad \Rightarrow$

$$\left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}\right| = |z^{n-1} - z_0^{n-1} + z_0(z^{n-2} - z_0^{n-2}) + \ldots + z_0^{n-2}(z - z_0)| \le$$

$$\le |z^{n-1} - z_0^{n-1}| + |z_0|\,|z^{n-2} - z_0^{n-2}| + \ldots + |z_0|^{n-2}\,|z - z_0| \le$$

$$\le |z - z_0| \left[(n-1)\rho^{n-2} + (n-2)|z_0|\rho^{n-3} + \ldots + |z_0|^{n-2}\right] \le \frac{n(n-1)}{2} |z - z_0|\, \rho^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}\right| \le |z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2} \to_{z \to z_0} 0$$

perché $\rho < r \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2} < +\infty$.

A2: Prova di 5. Siano $s_N := \sum\limits_{n=0}^{N} z_n, \quad \sigma_N := \sum\limits_{n=0}^{N} w_n$

$$p_N := \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{j+k=n} z_j w_k \Big) = z_0 w_0 + (z_0 w_1 + z_1 w_0) + \ldots + (z_0 w_N + z_1 w_{N-1} + \ldots + z_{N-1} w_1 + z_N w_0)$$

$$= z_0(w_0 + w_1 + \ldots + w_N) + z_1(w_0 + \ldots + w_{N-1}) + \ldots + z_N w_0.$$

Dunque

$$|s_N \, \sigma_N - p_N| =$$

$$|z_0(w_0 + \ldots + w_N) + z_1(w_0 + \ldots + w_N) + \ldots + z_{N-1}(w_0 + \ldots + w_N) + z_N(w_0 + \ldots + w_N) -$$

$$[z_0 (w_0 + w_1 + \ldots + w_N) + z_1 (w_0 + \ldots + w_{N-1}) + \ldots + z_{N-1}(w_0 + w_1) + z_N w_0]| =$$

$$|z_1 w_N + z_2(w_{N-1} + w_N) + \ldots + z_{N-1}(w_2 + \ldots + w_N) + z_N (w_1 + \ldots + w_N)| \le$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left[|z_j| \, |\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}| \right] + \sum_{j=n+1}^{N} \left[|z_j| \, |\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}| \right] \leq$$

$\leq \left[\sum_{j=1}^{n} |z_j| \right] \left[\sum_{k=N-n+1}^{\infty} |w_k| \right] + \left[\sum_{j\geq n+1} |z_j| \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} |w_k| \right]$ $\qquad n := [\frac{N}{2}]$. Da

$\sum_{k=N-[\frac{N}{2}]+1}^{\infty} |w_k| \to_{N\to+\infty} 0$, $\sum_{j\geq[\frac{N}{2}]+1} |z_j| \to_{N\to+\infty} 0$, $\sum_j |z_j| < +\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k| < \infty$ segue $|s_N \, \sigma_N - p_N| \to_{N\to+\infty} 0$ e quindi $\lim_N p_N = \lim_N s_N \, \sigma_N$.

ESERCIZIO. $\qquad e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n \qquad$ É

$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{(n-k)!(n-k-1)...n}{(n-k)!n\,n...n} < 1$

e quindi
$$\limsup_n (1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Viceversa, $n > n_0 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n > \sum_{k=0}^{n_0} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{n^k} \Rightarrow \liminf_n (1+\frac{1}{n})^n \geq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!}, \ \forall n_0$

perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = (1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{2}{n}) \ldots (1-\frac{k-1}{n}) \to_n 1$. Quindi

$$\liminf_n (1+\frac{1}{n})^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

ESERCIZI.

1. Serie di Taylor di $\sin^2 x$. Da $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, segue

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!}] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{2n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2}$$

2. Serie di Taylor di $E(x) := \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

$$E(x) = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}]\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x [\frac{t^{2n}}{n!}]\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$